

UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO EM ASTROFÍSICA E FÍSICA COMPUTACIONAL

Estudo do Fenômeno de Emaranhamento Quântico em
Sistemas de Duas Partículas

ELIO BATTISTA PORCELLI

Orientador: Prof. Dr. Victor dos Santos Filho

Co-Orientador: Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo

Dissertação apresentada ao Mestrado em
Astrofísica e Física Computacional, da
Universidade Cruzeiro do Sul, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Astrofísica e Física
Computacional.

SÃO PAULO

2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA
UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL

P869e	Porcelli, Elio Battista. Estudo do fenômeno de emaranhamento quântico em sistemas de duas partículas / Elio Battista Porcelli. -- São Paulo; SP: [s.n], 2010. 66 p. : il. ; 30 cm. Orientador: Victor dos Santos Filho. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Astrofísica e Física Computacional, Universidade Cruzeiro do Sul. 1. Mecânica quântica 2. Paradoxo EPR (Einstein, Podolski e Rosen) 3. Emaranhamento quântico 4. Teletransporte quântico 5. Física moderna. I. Santos Filho, Victor dos. II. Universidade Cruzeiro do Sul. Programa de Pós-Graduação em Astrofísica e Física Computacional. III. Título. CDU: 530.145(043.3)
-------	--

UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Estudo do Fenômeno de Emaranhamento Quântico em
Sistemas de Duas Partículas

Elio Battista Porcelli

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada
pela Banca Examinadora em 31.05.2010.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Victo dos Santos Filho
Universidade Cruzeiro do Sul

Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo
Universidade Cruzeiro do Sul

Prof. Dr. Tobias Frederico
Instituto de Tecnologia Aeronáutica - CTA

À

Minha esposa Luciana

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Victo dos Santos Filho por todo suporte e paciência dedicados à minha orientação.

Ao Laboratório de Física Teórica e Computacional, especialmente ao meu co-orientador Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo.

À Universidade Cruzeiro do Sul por ter oferecido o Curso de Mestrado em Astrofísica e Física Computacional no período noturno.

“AO INFINITO... E ALÉM”.

**BUZZ LIGHTYEAR
(Toy Story - 1995)**

Pixar Animation Studios

PORCELLI, E. B. **Estudo do fenômeno de emaranhamento quântico em sistemas de duas partículas.** 2010. 66 f. Dissertação (Mestrado em Astrofísica e Física Computacional)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2010.

RESUMO

Este trabalho aborda o estudo do emaranhamento quântico entre duas partículas, desde a sua origem no artigo do gedankenexperiment (experimento pensado) de Einstein, Podolski e Rosen (EPR) de 1935 – que originou o famoso paradoxo EPR – até o artigo do Teletransporte de estados quânticos de 1993. É um estudo geral do formalismo e do histórico da evolução e da consolidação do conceito de emaranhamento quântico, mostrado em detalhes. Por fim, usando o formalismo da mecânica quântica, é demonstrado que num sistema emaranhado de duas partículas, onde não há interação mútua e nem com o meio exterior via interações locais conhecidas, uma das partículas livres sofre alteração de seu momento imediatamente quando a outra parceira se choca numa barreira de potencial infinito.

Palavras-chave: Paradoxo EPR, Entrelaçamento ou emaranhamento quântico, Teletransporte quântico.

PORCELLI, E. B. **Study of the phenomenon of quantum entanglement in systems of two particles.** 2010. 66 f. Dissertação (Mestrado em Astrofísica e Física Computacional)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2010.

ABSTRACT

This work concerns to the study of quantum entanglement between two particles, since its origin in the article of the “gedankenexperiment” of Einstein, Podolski e Rosen (EPR) in 1935 – that originated the famous EPR paradox – until Bennett’s article of teleportation in 1993. It is a wide study of the formalism and the history of the evolution and the consolidation of quantum entanglement concept, shown in detail. At last, by using the formalism of quantum mechanics, it is shown that in an entangled system of two particles, where no interaction happens with each other as well as the outside world via local known interactions, one of the free particles undergoes an immediate change of its momentum when the other partner particle hits an infinite potential well.

Keywords: EPR Paradox, Quantum entanglement, Quantum teleportation.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

1	INTRODUÇÃO...	1
---	---------------	---

CAPÍTULO 2

2	BASE FORMAL DA MECÂNICA QUÂNTICA	3
2.1	Postulados	3
2.2	Projetores e teorema espectral	5
2.3	Operadores de Momento e Posição.....	6
2.4	Relações de incerteza para operadores	7
2.5	Evolução Unitária e Equação de Schrödinger.. ..	7
2.6	Postulados para o operador densidade	8
2.7	Operadores e suas propriedades.....	9
2.8	Autovalores e autofunções.....	10

CAPÍTULO 3

3	O PARADOXO EPR.....	13
3.1	Análise conceitual da mecânica quântica	13
3.2	Experimento pensado	16

CAPÍTULO 4

4	DEBATE SOBRE O PARADOXO EPR E NOVAS PROPOSTAS	21
4.1	Visão de Bohr sobre o paradoxo.....	21
4.2	Proposta de Bohm.....	22
4.3	Proposta de Einstein... ..	24

CAPÍTULO 5

5	FORMALISMO MODERNO.. ..	29
---	-------------------------	----

CAPÍTULO 6

6	O TESTE DA DESIGUALDADE DE BELL E O TELETRANSPORTE	37
6.1	Teorias de Variáveis Ocultas.....	37
6.2	A desigualdade de Bell... ..	38
6.3	Aspect demonstra a violação da desigualdade de Bell... ..	38
6.4	Teletransporte: Um exemplo de aplicação envolvendo emaranhamentos quânticos... ..	42

CAPÍTULO 7

7	EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM UM POTENCIAL	47
----------	---	-----------

CAPÍTULO 8

8	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	55
----------	---	-----------

	REFERÊNCIAS.....	56
--	-------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

Até 1935, o estado combinado de um sistema de partículas, determinado pela interação mútua entre elas via forças locais conhecidas, era estudado principalmente no contexto subatômico, atômico ou molecular.

Nesse ano, Einstein, Podolsky e Rosen [1] publicaram um artigo descrevendo uma experiência de pensamento ou imaginária chamada posteriormente de EPR, mostrando o estado combinado de um par de partículas que interagiram entre si, e que depois se separaram a tal ponto de não mais se influenciarem por essa interação.

A teoria quântica prevê que nessas condições se houver uma medição para saber o estado de uma das partículas, imediatamente se conhece o estado da outra, independentemente da distância que as separa.

Segundo os autores mencionados, isso não seria possível porque não haveria mais interação entre as partículas, ou seja, essa situação seria paradoxal. Einstein chamou essa influência entre as partículas de ação fantasmagórica à distância.

O formalismo da mecânica quântica necessário para compreender esse experimento pensado e outras posteriores, é mostrado no capítulo 2 e a descrição detalhada dessa experiência é mostrada no capítulo 3. A defesa da teoria quântica feita por Bohr [2] em 1935 em resposta ao artigo da experiência EPR é descrita no capítulo 4.

Devido à dificuldade de se colocar em prática a experiência EPR, Bohm [3] fez em 1952 uma nova proposta experimental envolvendo a medição do spin de duas partículas num estado singleto e depois, em 1954, Einstein [4] fez uma proposta similar, mas com previsões diferentes. Essas propostas estão também descritas no capítulo 4.

Usando um formalismo mais moderno através da notação "bracket", Pisa [5] reapresentou uma análise bastante técnica sobre a experiência EPR, mostrada no artigo de Schrödinger de 1935 [?], onde o termo "entanglement" ou emaranhamento em português foi mostrado pela primeira vez.

As partículas representadas pelo mesmo estado combinado são ditas então como emaranhadas. Esse trabalho de Pisa é descrito detalhadamente no capítulo 5. O debate sobre a experiência EPR e o emaranhamento entre partículas continuou de tal forma que teorias como a teoria das variáveis ocultas foram propostas por Bohm na década de 1950 para servir de alternativa a mecânica quântica.

Em 1964, Bell [7] elaborou uma forma de testar quantitativamente as previsões da mecânica quântica através de desigualdades envolvendo grandezas mensuráveis experimentalmente.

Numa década depois, experiências foram feitas indicando a validade das previsões da mecânica quântica em oposição às previsões das teorias das variáveis ocultas locais, mas a confirmação definitiva veio com a experiência de Aspect [8] e colaboradores de 1982.

A validação das previsões da mecânica quântica nas experiências do tipo EPR que se sucederam trouxe uma forte motivação para o desenvolvimento de aplicações dos emaranhamentos quânticos. Uma das aplicações foi a de teletransporte de estados quânticos proposta em 1993 por Bennett [9] e colaboradores.

O capítulo 6 mostra o debate sobre as teorias das variáveis ocultas, as desigualdades de Bell, a experiência de Aspect e a proposta de teletransporte de estados quânticos de Bennett. Os estudos sobre as aplicações dos emaranhamentos quânticos acontecem até os dias atuais, destacando-se não somente no caso do teletransporte quântico como também e principalmente no campo da computação e da comunicação quântica, envolvendo observáveis discretos como o spin.

O capítulo 7 mostra um estudo preliminar e original desenvolvido pelo autor desta dissertação de um sistema de duas partículas emaranhadas, sendo que uma delas é submetida a um potencial.

Tal estudo, envolvendo observáveis contínuos como o momento e partículas emaranhadas em um potencial, indica a possibilidade de se verificar uma mudança no momento de uma das partículas devido à mudança no momento da primeira partícula devido ao potencial, sugerindo a influência de efeitos não-locais nesses sistemas, mesmo em longas distâncias.

Finalmente, o capítulo 8 conclui a dissertação e indica possíveis campos ainda inexplorados decorrentes desse estudo original mencionado.

Capítulo 2

Base formal da mecânica quântica

No estudo dos emaranhamentos quânticos, é fundamental conhecer a base formal da mecânica quântica.

Todo o formalismo e conceitos mostrados a seguir serão utilizados no desenvolvimento dos demais capítulos que compõem esta dissertação, tanto usando a notação “bracket” como usando a notação usual.

Seguindo Pessoa Jr. [10], a seguir serão mostrados os postulados da mecânica quântica e demais conceitos, usando a notação “bracket”.

2.1 Postulados

Postulado 1 *Em um instante fixo t_0 , o estado de um sistema físico fechado é definido por um vetor de estado normalizado $|\Psi(t_0)\rangle$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Corolário 1 *Princípio da Superposição: Uma combinação linear de vetores de estado é um vetor de estado (já que $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial).*

Corolário 2 *Dois sistemas não-idênticos e não-interagentes, descritos individualmente por $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$, podem ser representados por um vetor de estado composto $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ definido em $H_1 \otimes H_2$.*

Postulado 2 *Toda grandeza física mensurável (observável) A é descrita por um operador auto-adjunto $\hat{A}$ agindo em $\mathcal{H}$.*

As entidades matemáticas da teoria podem, através dos postulados acima, ser interpretadas fisicamente, sendo que o postulado 1 se aplica tanto para um sistema de uma partícula como para uma coleção de sistemas no mesmo estado.

Postulado 3 *A evolução temporal do vetor de estado $|\Psi(t_0)\rangle$ é linear e determinista, sendo regida pela equação de Schrödinger dependente do tempo:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

em que o hamiltoniano $\hat{H}(t)$ é o operador auto-adjunto associado à energia total do sistema.

Postulado 4 *O único resultado possível para a medição de um observável A é um dos autovalores a_i do operador correspondente $\hat{A}$.*

Quando se diz medição de um operador $\hat{A}$ significa medição do observável A correspondente ao operador $\hat{A}$.

Postulado 5 *Decomposição espectral: Quando o observável A é medido em um sistema no estado normalizado $|\Psi\rangle$, a probabilidade $P(a_i)$ de se obter o autovalor de espectro discreto a_i do operador correspondente $\hat{A}$ é:*

$$P(a_i) = |\langle \Psi_i | \Psi \rangle|^2, \quad (2.2)$$

em que $|\Psi_i\rangle$ é o autovetor associado ao autovalor a_i de $\hat{A}$.

Estados $|\Psi_{ij}\rangle$ que são autovetores de dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{O}$ que comutam: $[\hat{A}, \hat{O}] = 0$, em que $[\hat{A}, \hat{O}] \equiv \hat{A}\hat{O} - \hat{O}\hat{A}$ compõem o chamado caso degenerado. Tal estado degenerado pode sempre ser reescrito como um produto tensorial $|\Phi_i\rangle \otimes |\xi_j\rangle$, em que os $|\Phi_i\rangle$ são os autovetores de $\hat{A}$ e $|\xi_j\rangle$ os autovetores de $\hat{O}$, com autovalores o_j .

Neste caso, $P(a_i)$ é obtido somando-se $P(a_i, o_j)$ para todos os valores de j :

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^j |\langle \Psi_{ij} | \Psi(t) \rangle|^2. \quad (2.3)$$

O valor médio do operador $\hat{A}$ para um estado normalizado $|\Psi\rangle$ é a média estatística dos autovalores resultantes, e é dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum_i |\langle \Psi_i | \Psi \rangle|^2 a_i = \sum_i P(a_i) \cdot a_i \quad (2.4)$$

A evolução do valor médio $\langle \hat{A} \rangle(t)$ segue do Postulado 3:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.5)$$

Uma grandeza conservada ou constante de movimento é definida como um operador que não depende explicitamente do tempo ($\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$) e que comuta com o hamiltoniano: $[\hat{A}, \hat{H}(t)] = 0$.

Postulado 6 *Postulado da Projeção: Se a medição de um observável A em um sistema no estado $|\Psi\rangle$ fornece o resultado a_i , então o estado do sistema imediatamente após a medição é a projeção normalizada de $|\Psi\rangle$ no autosubespaço associado a a_i .*

2.2 Projetores e teorema espectral

Supondo que um sistema esteja no seguinte estado:

$$|\Psi\rangle = \sum_i b_i |\Phi_i\rangle, \quad (2.6)$$

em que os vetores normalizados $|\Phi_i\rangle$ são os autovetores de um operador $\hat{A}$ associados a autovalores y_i :

$$\hat{A}|\Phi_i\rangle = y_i|\Phi_i\rangle, \quad (2.7)$$

qual é a probabilidade de medir o observável associado a $\hat{A}$ e obter o autovalor y_i ? Pelo algoritmo estatístico, sabemos que é $|b_i|^2$. Seria possível obter o mesmo resultado calculando-se o valor médio de algum operador?

A resposta é sim. O operador cujo valor médio é uma probabilidade chama-se projetor, e ele se escreve da seguinte forma:

$$\hat{S}[\Phi_i] = |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|. \quad (2.8)$$

A ação do projetor $\hat{S}[\Phi_i]$ sobre o vetor de estado $|\Psi\rangle$ é projetá-lo sobre $|\Phi_i\rangle$. Em notação matemática, temos

$$\hat{S}[\Phi_i]|\Psi\rangle = b_i|\Phi_i\rangle. \quad (2.9)$$

Assim é possível verificar que:

$$\langle\Psi|\hat{S}[\Phi_i]|\Psi\rangle = |b_i|^2. \quad (2.10)$$

Um projetor $\hat{S}[\Phi_i]$ é um observável (ver Postulado 2) cujos autovetores associados são os $|\Phi_i\rangle$, com autovalores δ_{ij} (ou seja, 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$). É possível então escrever qualquer operador $\hat{A}$ em termos de projetores. Este resultado foi provado por von Neumann para o caso de espectros contínuos e chama-se teorema espectral:

$$\hat{A} = \sum_i y_i \hat{S}[\Phi_i]. \quad (2.11)$$

Com isso, fica fácil escrever qual é o operador que tem $\{|\Phi_i\rangle\}$ como autovetores e y_i como autovalores.

2.3 Operadores de Momento e Posição

Os postulados vistos também se aplicam a grandezas contínuas como posição e momento. Considere o espaço de Hilbert de dimensão infinita $\mathcal{H}_f$ contendo todos os vetores de estado possíveis $|\Psi\rangle$ para uma partícula. Tomemos a base de autovetores de posição $\{|\mathbf{r}'\rangle\}$, definidos para cada autovalor de posição $\mathbf{r}'$ por meio do operador $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{r}'\rangle = \mathbf{r}'|\mathbf{r}'\rangle \quad (2.12)$$

Um vetor genérico $|\Psi\rangle$ pode então ser escrito como uma superposição de $|\mathbf{r}'\rangle$, que no caso de variáveis contínuas se faz por meio de uma integral (ao invés do somatório):

$$|\Psi\rangle = \int d\mathbf{r}' \Psi(\mathbf{r}') |\mathbf{r}'\rangle. \quad (2.13)$$

Os coeficientes desta superposição contínua são expressos pela função $\Psi(\mathbf{r})$ e constituem a “função de onda” introduzida por Schrödinger. Tal função tem que ser “quadrado integrável”, ou seja, deve ser tal que a seguinte integral converge:

$$\int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty. \quad (2.14)$$

Se quisermos representar o vetor $|\mathbf{r}\rangle$ na base $\{|\mathbf{r}'\rangle\}$, podemos usar a equação que define o vetor genérico $|\Psi\rangle$ substituindo $\Psi(\mathbf{r}')$ pela função delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Tal função, porém, não é quadraticamente integrável, o que significa que os vetores $|\mathbf{r}'\rangle$ não pertencem a $\mathcal{H}_f$. A abordagem usual é, pois, a de estender o domínio de definição dos operadores de $\mathcal{H}_f$ de forma a incluir tais auto-funções.

É possível estender o domínio de definição de $\mathcal{H}_f$ de forma a construir a base $|\mathbf{p}'\rangle$ de autovalores do operador momento $\mathbf{p}'$, de maneira que:

$$\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}'\rangle = \mathbf{p}'|\mathbf{p}'\rangle. \quad (2.15)$$

O vetor genérico $|\Psi\rangle$ definido na equação acima pode então ser escrito como:

$$|\Psi(\mathbf{r})\rangle = \int d\mathbf{p}' \Psi(\mathbf{p}') |\mathbf{p}'\rangle, \quad (2.16)$$

em que os coeficientes $\Psi(\mathbf{p})$ são obtidos da transformada de Fourier de $\Psi(\mathbf{r})$.

Para representar $|\mathbf{p}\rangle$ na base $\{|\mathbf{p}'\rangle\}$, obtemos novamente a função delta de Dirac $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Porém, para representar $|\mathbf{p}\rangle$ na base $\{|\mathbf{r}'\rangle\}$, obteríamos:

$$|\mathbf{p}\rangle = \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p} \rangle |\mathbf{r}'\rangle, \quad (2.17)$$

em que $\langle \mathbf{r}' | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{\hbar^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'}$ é a função de onda representando uma onda plana de momento $\mathbf{p}$. Comparando as equações de $|\Psi(\mathbf{r})\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$, notamos que a função de onda genérica $\Psi(\mathbf{r})$ pode também ser escrita como o produto escalar $\langle \mathbf{r} | \Psi(\mathbf{r}) \rangle$.

2.4 Relações de incerteza para operadores

Os operadores de posição e momento não comutam. Restringindo-nos ao eixo x , temos:

$$[\hat{X}, \hat{P}_x] = i\hbar \hat{I}. \quad (2.18)$$

O desvio-padrão $\Delta\hat{A}$ de um operador genérico $\hat{A}$ é definido da seguinte maneira:

$$\Delta\hat{A} = \left(\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

A partir das duas equações precedentes e da desigualdade triangular, deduz-se a relação de incerteza para operadores:

$$\Delta\hat{X} \cdot \Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.20)$$

Para generalizar esta relação para outros observáveis, como componentes de spin, Robertson (1929) obteve a seguinte expressão:

$$\Delta\hat{A} \cdot \Delta\hat{U} \geq \frac{1}{2} |\langle \Psi | [\hat{A}, \hat{U}] | \Psi \rangle|. \quad (2.21)$$

Esta relação é sempre verdadeira e é aceita por muitos como definida, mas ela tem problemas porque o lado direito depende explicitamente do estado $|\Psi\rangle$. Por exemplo, se tal estado for um autovetor do operador $\hat{A}$, os dois lados da relação indicada anteriormente se anulam ($\Delta\hat{A} = 0$), e a desigualdade deixa de dar um limite inferior para $\Delta\hat{U}$.

2.5 Evolução Unitária e Equação de Schrödinger

A evolução dos estados quânticos pode ser descrita pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.22)$$

em que o hamiltoniano $\hat{H}(t)$ é o operador auto-adjunto associado à energia total do sistema, tendo de ser escolhido adequadamente.

Uma maneira alternativa de descrever esta mesma mudança de estado é através de um operador de evolução que é linear e “unitário”. Um operador unitário é tal que seu inverso é igual ao seu adjunto, ou seja, $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$, o que equivale a escrever

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}, \quad (2.23)$$

em que $\hat{I}$ é o operador identidade.

A equação de Schrödinger torna-se:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.24)$$

na qual

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t') dt'. \quad (2.25)$$

Para um operador hamiltoniano $\hat{H}$ independente do tempo, a evolução temporal assume a seguinte forma simplificada (com $t_0 = 0$):

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right). \quad (2.26)$$

A evolução unitária é caracterizada por ser contínua, linear, determinista e reversível, ao passo que a transição descrita pelo postulado da projeção é praticamente instantânea, não-linear, não-determinista e irreversível.

2.6 Postulados para o operador densidade

As regras da mecânica quântica podem ser reformuladas no formalismo de operadores de densidade. A equação análoga à equação de Schrödinger para a evolução temporal do operador densidade $\hat{W}$ é escrita a partir do operador de evolução temporal $\hat{U}$, definido pela equação:

$$\hat{W}(t) = \hat{U}(t) \hat{W}(0) \hat{U}^{-1}(t). \quad (2.27)$$

O valor médio de um operador sobre o estado é dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{W}) = \sum_i y_i w_{ii}, \quad (2.28)$$

em que y_i representa o autovalor do operador $\hat{A}$ e w_{ii} representa o elemento de matriz diagonal de $\hat{W}$ na base de seus autovetores.

A expressão da probabilidade de um resultado específico é dada pelo valor médio do operador de projeção sobre o autosubespaço associado. No caso não-degenerado, teríamos:

$$P(y_i) = \text{Tr}(\hat{P}[\Phi_i] \hat{W}) = \langle \Phi_i | \hat{W} | \Phi_i \rangle. \quad (2.29)$$

Usando a notação usual, trataremos agora mais detalhes sobre a teoria dos operadores, segundo Mundim [11].

2.7 Operadores e suas propriedades

Vimos que a evolução temporal na mecânica quântica é expressa pelas soluções da equação de Schrödinger, a qual é uma equação diferencial nas coordenadas espaciais e temporal.

Mostramos também que as grandezas físicas observáveis são representadas, nesta teoria, por operadores, que são entes matemáticos abstratos.

Para tornar este procedimento abstrato um pouco mais concreto, podemos seguir a Ref. [11], na qual vemos ser necessário aplicá-lo dentro das regras da mecânica quântica, no sentido de obter as grandezas físicas realmente observáveis.

Este procedimento pode ser resumido pela seguinte definição: *Definimos como observáveis (O) todas aquelas grandezas reais que podem ser medidas em laboratório, as quais, dentro da teoria quântica, são representadas por operadores hermitianos, tais como:*

$$\hat{X}, \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \hat{H} = -\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt}, \quad (2.30)$$

que representam a posição da partícula no eixo x , o seu momento linear e a sua energia, respectivamente. Estes operadores terão realização física quando aplicados na função de onda Ψ , o que nos leva a concluir que o observável posição é obtido apenas multiplicando o operador $\hat{X}$ pela função de onda, enquanto o momento é obtido pela derivada da função de onda. A seguir, damos um exemplo de aplicação dos operadores na mecânica quântica.

Exemplo 1: O momento linear:

Se a função de onda tem a forma $\Psi = Ae^{ikx}$, então o operador momento pode ser determinado derivando esta função em relação à coordenada x :

$$\Psi = Ae^{ikx} \quad (2.31)$$

de onde tiramos que:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx}) = A \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{ikx} = \hbar k Ae^{ikx} = \hbar k \Psi. \quad (2.32)$$

A equação (2.32) é denominada comumente equação de autovalor para o momento linear que, quando comparada com a equação (2.31), determina o valor de $\mathbf{p}_x$, isto é, $p_x = +\hbar k$. Caso a função de onda esteja se propagando no sentido oposto, $(-x)$, então o momento mudará de sinal.

2.8 Autovalores e autofunções

Vimos que para extrair informações sobre um dado sistema quântico, é necessário resolver a equação de Schrödinger independente do tempo, cuja solução é uma função de onda Ψ , que é uma autofunção do operador hamiltoniano $\hat{H}$, isto é:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (2.33)$$

na qual vemos que a energia E é o autovalor do operador $\hat{H}$. Resumidamente, podemos dizer que a equação de Schrödinger é uma equação de autovalor da forma:

$$(\text{operador}) (\text{função}) = (\text{fator constante}) (\text{a mesma função}),$$

ou, simbolicamente,

$$\hat{O}\Psi = o\Psi, \quad (2.34)$$

em que o fator constante o é o autovalor do operador. Desta forma, podemos dizer que: *resolver a equação de Schrödinger é encontrar os autovalores e autofunções do operador hamiltoniano do sistema*. Os autovalores de um dado operador representam os valores mensuráveis permitidos das grandezas físicas.

Para esclarecer estes conceitos, vamos mostrar que a função $\Psi = Ae^{ikx}$ é uma autofunção do operador momento linear ($\hat{p}$) e que a função $\Psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção de $\hat{p}$. Para verificar isto basta aplicar o operador $\hat{p}$ na função de onda, como a seguir. Por definição, o operador momento é igual a:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}. \quad (2.35)$$

Então, temos, de acordo com o cálculo demonstrado em (2.32), que:

$$\hat{p}_x\Psi = \hbar k\Psi = p\Psi, \quad (2.36)$$

que é uma equação de autovalor equivalente à equação (2.34). Assim, podemos dizer que a função de onda $\Psi = Ae^{ikx}$ é autofunção do operador $\hat{p}$ com autovalor $\hbar k$. Como o número de onda k pode ser escrito em termos do comprimento de onda λ , temos que:

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} k = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}, \quad (2.37)$$

que é o resultado obtido por Bohr na quantização do átomo de hidrogênio. Este resultado, que corresponde à relação de de Broglie da dualidade onda-partícula, é geral, sendo o átomo de hidrogênio um caso especial.

Vamos, agora, verificar que a função $\Psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção do operador $\hat{p}$, usando o mesmo procedimento das equações (2.32) e (2.36), isto é:

$$\hat{p}_x \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx^2}) = \frac{\hbar}{i} (2ikx) Ae^{ikx^2} = (2\hbar kx) \Psi. \quad (2.38)$$

Analisando o último termo entre parênteses na equação (2.38), notamos que ele não é uma constante, como estabelece a regra, ele depende da posição. E se a equação (2.38) fosse escrita como:

$$\hat{p}_x \Psi = 2\hbar k (x\Psi) = 2\hbar k \Psi', \quad (2.39)$$

ela seria uma equação de autovalor? Não, mesmo nesta forma ela não é uma equação de autovalor porque as funções Ψ e Ψ' são diferentes. Então, na prática, estamos sempre procurando na mecânica quântica por funções que são autofunções de um dado operador hermitiano, especialmente do operador hamiltoniano usado para se calcular a energia, isto é: (operador hamiltoniano)(função de onda) = (energia)(a mesma função de onda). Este procedimento é aplicável a qualquer observável físico. Isto significa que os autovalores de um dado operador devem ser reais, caso contrário eles não representarão observáveis que possam ser medidos em laboratório, o que é decorrência da hermiticidade dos observáveis.

Em resumo, podemos dizer que as autofunções de um dado operador hermitiano geram sempre autovalores reais e, portanto, são observáveis físicos.

Com este arcabouço teórico, estamos prontos para iniciar o tratamento teórico dos emaranhamentos quânticos, dos experimentos pensados e realizados e um novo estudo envolvendo um sistema simples sujeito a interações locais (potenciais e forças conhecidas) e interações não-locais (associadas aos emaranhamentos quânticos).

Capítulo 3

O Paradoxo EPR

A publicação de um artigo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [1] em 1935 causou grandes discussões no meio científico ao se questionar a completeza da MQ, associada ao conceito de estado quântico representado pela função de onda Ψ . Essa polêmica deu origem ao conhecido paradoxo EPR.

Neste trabalho, usaremos a sigla EPR para referenciar os autores e suas idéias.

É válido esmiuçar em detalhes o artigo porque ele é sem dúvida a base de todo estudo posterior sobre os emaranhamentos quânticos.

3.1 Análise conceitual da mecânica quântica

Segundo os autores do artigo EPR, numa teoria completa existe um elemento correspondente a cada elemento de realidade. Uma condição suficiente para a realidade de uma quantidade física é a possibilidade de previsão da mesma com certeza, sem perturbar o sistema.

No caso de duas quantidades físicas, descritas, segundo a Mecânica Quântica, por operadores que não comutam (o exemplo mais comum é o momento linear e a posição), o conhecimento preciso de um impede o conhecimento preciso do outro.

Segundo eles, há duas possibilidades:

- a descrição da realidade dada pela função de onda na Mecânica Quântica está incompleta ou
- estas duas quantidades não podem ter realidade simultânea.

A consideração do problema de fazer previsões em um sistema com base em medições feitas em outro sistema com o qual tenha previamente interagido conduz ao resultado que se a primeira possibilidade é falsa então a segunda também é falsa.

Qualquer consideração séria de uma teoria física deve levar em conta a distinção entre a realidade objetiva, a qual é independente de qualquer teoria, e os conceitos físicos que a mesma utiliza.

O sucesso de uma teoria física depende da resposta a duas questões principais:

1. “A teoria está correta?” e
2. “A descrição dada pela teoria está completa?”

É somente no caso das respostas para ambas essas questões é que os conceitos da teoria podem ser considerados satisfatórios. A correção da teoria é julgada pelo grau de concordância entre as conclusões da mesma e a experiência humana. Estas experiências que sozinhas habilitam-nos a fazer inferências sobre a realidade assume na Física a forma de experimentos e medições.

É a segunda questão que os autores consideram em sua análise sobre a mecânica quântica. Qualquer que seja a interpretação do termo “completo”, o seguinte requisito para uma teoria completa é visto como necessário: “todo elemento de realidade física tem de ter uma contraparte numa teoria física.” Esse requisito é chamado de condição de completeza.

A segunda questão é então facilmente respondida quando se decide o que são os elementos de realidade física. Os elementos de realidade física não podem ser determinados *a priori* por considerações filosóficas, mas devem ser obtidos com base em resultados de experimentos e medidas.

Uma definição compreensiva e abrangente da realidade é, todavia, desnecessária para a proposta de EPR.

Um critério foi por eles definido como razoável: “*Se, sem perturbar um sistema físico, for possível predizer com certeza (isto é, com a probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a essa quantidade física.*”

Considerada não como necessária, mas meramente como uma condição suficiente de realidade, este critério está em acordo com a mecânica clássica, tanto quanto as idéias de realidade da mecânica quântica. Para ilustrar as idéias envolvidas, EPR considera a descrição pela mecânica quântica do comportamento de uma partícula tendo um simples grau de liberdade.

O conceito fundamental da teoria quântica é o de *estado*, o qual é suposto como completamente caracterizado pela função de onda Ψ , a qual é uma função de variáveis escolhidas para descrever o comportamento da partícula. Correspondendo a cada quantidade física observável A , existe um operador que pode ser denotado

por $\hat{A}$. Se Ψ é uma autofunção do operador $\hat{A}$, a equação de auto-valores fornece:

$$\Psi' \equiv A\Psi = a\Psi. \quad (3.1)$$

Se a é um número, então a quantidade física A tem, com certeza, o valor a sempre que a partícula está num estado dado por Ψ .

Em concordância com o critério de realidade, para uma partícula cujo estado é dado por Ψ considerado na equação (3.1), existe um elemento de realidade física correspondente à quantidade A . Por exemplo:

$$\Psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x\right), \quad (3.2)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck, p_0 é algum número constante e x é a variável independente. Se o operador correspondente ao momento da partícula é dado por:

$$p = -\hbar i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.3)$$

obtém-se:

$$\Psi' = p\Psi = -\hbar i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_0\Psi. \quad (3.4)$$

Assim, no estado dado pela equação (3.2), o momento tem certamente o valor p_0 . Isto significa dizer que o momento da partícula dado pela equação (3.2) é real.

Em outras palavras, se a equação (3.1) não se aplica, então podemos dizer que a quantidade A não possui um valor particular. Este é o caso, por exemplo, da coordenada da partícula. O operador Q correspondente, por exemplo, ao autovalor x , é o operador de multiplicação pela variável independente x , logo:

$$Q\Psi = x\Psi \neq a\Psi. \quad (3.5)$$

Em concordância com a mecânica quântica, a probabilidade relativa de uma medição da coordenada dar um resultado verdadeiro entre a e b é:

$$P(a, b) = \int_a^b \overline{\Psi}\Psi dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (3.6)$$

Como esta probabilidade depende somente da diferença $b - a$, temos que todos os valores da coordenada são igualmente prováveis.

Um valor definido de coordenada para uma partícula num estado dado pela equação (3.2) é então imprevisível, mas pode ser obtido somente por uma medição direta. Tal medição, entretanto, perturba a partícula e assim afeta seu estado.

Depois que a coordenada é determinada, a partícula não mais estará no estado dado pela equação (3.2).

A conclusão usual dada pela mecânica quântica é que “*quando o momento da partícula é conhecido, sua coordenada não possui uma realidade física.*”

Mais genericamente, é mostrado pela mecânica quântica que se os operadores correspondentes a duas quantidades físicas, digamos A e B, não comutam, isto é: $[A, B] \neq 0 \leftrightarrow AB \neq BA$, então o conhecimento exato de um deles impede o conhecimento do outro.

Além disso, qualquer tentativa posterior de determinação experimental irá alterar o estado do sistema de modo a destruir o conhecimento do primeiro. Disto segue que ou (1) “a descrição de uma realidade física na mecânica quântica dada pela função de onda não é completa ou (2) quando os operadores correspondentes a duas realidades físicas que não comutam não podem ter realidade simultânea.”

Se ambas têm uma realidade simultânea - e assim valores definidos - estes valores deverão entrar numa descrição completa de acordo com a condição de completeza.

Então, se uma função de onda fornece tal descrição completa da realidade, esta conteria estes valores e estes poderiam ser previstos. Este não é o caso, segundo EPR.

Na mecânica quântica é usualmente assumido que a função de onda contém uma completa descrição de realidade física de um sistema num estado que lhe corresponde.

Esta primeira visão sobre este assunto é inteiramente razoável - a informação obtida de uma função de onda corresponde exatamente ao que pode ser medido, sem alterar o estado do sistema.

Os autores mostram, entretanto, que esta visão junto com o critério de realidade acima leva a uma contradição.

3.2 Experimento Pensado

Para esta proposta, os autores do artigo EPR supõem que existam dois sistemas, I e II, que interagem do tempo $t = 0$ até o tempo $t = T$ e depois se supõe que não mais existam interações entre essas duas partes.

Supõe-se também que os estados dos dois sistemas antes de $t = 0$ eram conhecidos. A figura (3.1) mostra a configuração do experimento pensado por EPR em que a posição e o momento (observáveis contínuos) das partículas 1 e 2 são medidos ao longo do eixo O_x . A figura indica duas situações em tempos diferentes, sendo que no instante $t < T$ as duas partículas estão interagindo mutuamente por intermédio de forças conhecidas e no instante $t > T$ as duas partículas não interagem mais mutuamente e partem em direções opostas ao longo do eixo O_x . Os detectores (D1 e D2) fazem medições primeiro do momento e depois da posição.

O cálculo do estado dos sistemas combinados $I + II$ pode ser feito com a ajuda

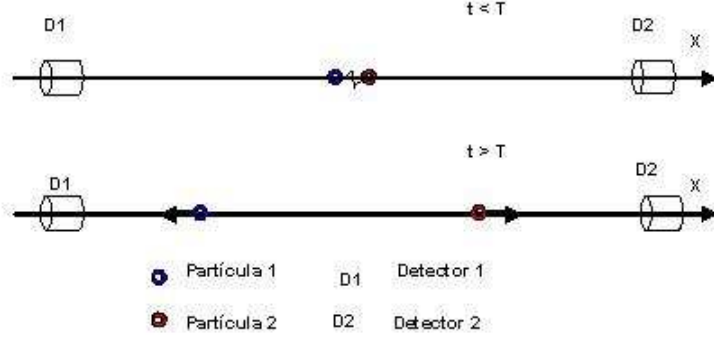


Figura 3.1: Configuração do experimento pensado por EPR.

da equação de Schrödinger em qualquer tempo subsequente, em particular para qualquer tempo $t > T$. A função de onda correspondente é dada por Ψ . Não é possível, entretanto, calcular o estado no qual qualquer um dos dois sistemas é deixado após a interação.

Isto pode ser feito segundo a mecânica quântica com a ajuda de medições adicionais pelo processo conhecido como a *redução do pacote de onda*.

A seguir, os autores consideram os pontos essenciais deste processo. Considera-se a_1, a_2, a_3 como os autovalores de alguma quantidade física A pertinente ao sistema A e $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1) \dots$ suas autofunções correspondentes, em que x_1 representa a variável usada para descrever o primeiro sistema.

Então Ψ , em função de x_1 , pode ser expressa como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (3.7)$$

em que x_2 representam as variáveis usadas para descrever o segundo sistema. Aqui, $\Psi_n(x_2)$ são coeficientes considerados meramente como coeficientes de expansão de Ψ numa série de funções ortogonais $u_n(x_1)$.

Supomos agora que a quantidade A é medida, resultando no valor a_k . A conclusão depois da medição é que o primeiro sistema é deixado num estado dado pela função de onda $u_k(x_1)$ e que o segundo sistema é deixado no estado dado pela função de onda $\Psi_k(x_2)$. Este é o processo de redução do pacote de onda, dado pela série infinita (3.7), que é reduzida para um único termo $\Psi_k(x_2) u_k(x_1)$.

O arranjo de funções $u_n(x_1)$ é determinado pela escolha de uma quantidade física A . Se ao invés disto, fosse a escolhida outra quantidade, como B , tendo os autovalores b_1, b_2, b_3 e autofunções $\nu_1(x_1), \nu_2(x_1), \nu_3(x_1), \dots$, obter-se-ia a seguinte expansão, ao invés da equação (3.7):

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) \nu_n(x_1) \quad (3.8)$$

sendo que os ϕ_s são novos coeficientes. Se agora a quantidade B é medida e é encontrado o valor b_r , conclui-se que, depois da medição, o primeiro sistema é deixado num estado dado por $\nu_r(x_1)$ e o segundo sistema é deixado num estado dado por $\phi_r(x_2)$.

Como consequência das duas diferentes medições feitas sobre o primeiro sistema, o segundo sistema pode ser deixado em estados com duas diferentes funções de onda.

Em outras palavras, visto que nesse período de tempo das medições os dois sistemas não mais interagem, nenhuma mudança real pode ser levada em conta no segundo sistema em consequência de qualquer medição que tenha sido feita no primeiro sistema. Isto é, claro, meramente uma situação pensada pela ausência de interação entre os dois sistemas.

Assim, é possível atribuir duas diferentes funções de onda (no nosso exemplo Ψ_k e ϕ_r) para uma mesma realidade (o segundo sistema depois da interação com o primeiro).

Agora, pode acontecer das duas funções Ψ_k e ϕ_r serem autofunções de dois operadores que não comutam e que são correspondentes a algumas quantidades físicas P e Q , respectivamente. Este pode ser realmente o caso a ser desenvolvido na situação a seguir.

Os autores supõem que os dois sistemas são duas partículas e que:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (3.9)$$

onde x_0 é alguma constante.

A quantidade A representa agora o momento da primeira partícula; então, como foi visto na equação (3.4) suas autofunções poderão ser:

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar}px_1}, \quad (3.10)$$

Esta autofunção corresponde então aos autovalores p .

Como existe neste caso um espectro contínuo, a equação (3.7) poderá agora ser reescrita como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (3.11)$$

onde:

$$\Psi_p(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2-x_0)p}. \quad (3.12)$$

Esta função Ψ_p é, entretanto, a autofunção do operador:

$$P = -\hbar i \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.13)$$

e que corresponde ao autovalor p do momento da segunda partícula.

Em outras palavras, se B é a coordenada da primeira partícula, a sua autofunção será:

$$\nu_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \quad (3.14)$$

e que corresponde ao autovalor x , em que $\delta(x_1 - x)$ é a bem conhecida função delta de Dirac.

A equação (3.8) se torna neste caso:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) \nu_x(x_1) dx, \quad (3.15)$$

onde:

$$\phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_2+x_0)p} dp = \hbar \delta(x - x_2 + x_0). \quad (3.16)$$

Esta função ϕ_x é, entretanto, a autofunção do operador:

$$Q = x_2, \quad (3.17)$$

o que corresponde ao autovalor $x + x_0$ da coordenada da segunda partícula, com:

$$PQ - QP = \hbar i. \quad (3.18)$$

Com todos esses argumentos, os autores indicaram, então, que é em geral possível para as funções Ψ_k e ϕ_r serem autofunções de operadores que não comutam, correspondendo a determinadas quantidades físicas.

Considerando novamente as equações (3.7) e (3.8), Einstein, Podolsky e Rosen assumem que Ψ_k e ϕ_r são autofunções inerentes a alguns operadores P e Q que não comutam, correspondendo aos autovalores p_k e q_r , respectivamente.

Assim, para medir tanto A quanto B é possível prever com certeza e sem perturbar de nenhuma forma o segundo sistema, tanto o valor da quantidade P (que é p_k) quanto o valor da quantidade Q (que é q_r).

De acordo com o critério de realidade proposto, no primeiro caso considera-se a quantidade P como sendo um elemento de uma realidade e no segundo caso a

quantidade Q também é considerada como sendo um elemento de uma realidade, mas como foi visto anteriormente, ambas as funções de onda ψ_k e ϕ_r correspondem a uma mesma realidade.

Segundo EPR, previamente foi provado que ou (1) a descrição da mecânica quântica dada pela função de onda não é completa ou (2) quando os operadores correspondentes a duas quantidades físicas não comutarem, as duas quantidades não podem ter realidade simultânea.

Considerando então que a função de onda não dá uma descrição completa da realidade física, a conclusão é que as duas quantidades físicas com operadores que não comutam podem ter realidade física simultânea. Assim, a negação de (1) leva somente à única alternativa de negar também (2).

Logo, a conclusão de EPR é que a descrição da realidade física dada pela função de onda na mecânica quântica não é completa.

Capítulo 4

Debate sobre o paradoxo EPR e novas propostas

4.1 Visão de Bohr sobre o paradoxo

Bohr [2] publicou um artigo poucos meses após o artigo de EPR fazendo uma contestação do mesmo e, portanto, uma defesa da mecânica quântica. O argumento de Bohr é que a medição de uma das partículas afeta a outra emaranhada quanticamente no experimento hipotético.

Segundo a análise do artigo de Bohr feita por Bassalo [12], quando é feita uma medição do momento linear da partícula 1 do par emaranhado, o momento linear da partícula 2 passa também a ser conhecido instantaneamente e assim nada se pode dizer sobre a posição dessa última partícula.

Bohr argumentou que as partículas que compõem o par correlacionado são inseparáveis, ou seja, possuem seu estado conjunto determinado pela mesma função de onda Ψ e que o colapso da mesma ocorre na medição de qualquer uma das partículas, afetando ambas simultaneamente (o colapso é não-local como o emaranhamento) mesmo que elas não mais interajam por forças locais.

É possível então conhecer os valores dos observáveis do mesmo tipo (como as posições x_1 e x_2) de ambas as partículas emaranhadas, medindo-se apenas uma delas, mas não é possível conhecer os valores dos seus observáveis canonicamente conjugados.

O desconhecimento dos observáveis canonicamente conjugados preserva então a completeza da mecânica quântica.

Então, mesmo para duas partículas emaranhadas que não mais interagem mutuamente via interações locais conhecidas, continuam válidas as relações de comutação entre seus observáveis momento e posição canonicamente conjugados:

$$[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar. \quad (4.1)$$

No instante em que se mede o momento da partícula 1 (p_1), conhece-se ao mesmo tempo o momento da partícula 2 (p_2) e, conforme as relações acima, não se pode mais conhecer com precisão a posição da partícula 1 (q_1) e a posição da partícula 2 (q_2).

No entanto, é possível conhecer automaticamente o momento da partícula 2 (p_2) se for feita uma medida do momento da partícula 1 (p_1), assim como a posição da partícula 2 (q_2) através da medida da posição da partícula 1 (q_1), de acordo com o experimento pensado por EPR.

A resposta de Bohr não teve a mesma repercussão que o artigo de EPR, tendo em vista que o problema era realmente intrínseco da mecânica quântica e Bohr não teve êxito em solucioná-lo.

Pesquisas no assunto prosseguiram, culminando com a proposta de Bohm, que visava simplificar o experimento pensado, tornando-o mais próximo de uma realização experimental.

4.2 Proposta de Bohm

Para tornar mais fácil a realização física do experimento pensado por EPR, David Bohm [3] elaborou uma versão desse experimento utilizando observáveis de spins com duas partículas emaranhadas 1 e 2 em estado conjunto singleto de spin (spin total igual a zero), onde os observáveis de spin (S_z^1+ , S_z^1- , S_z^2+ e S_z^2-) são medidos.

Se o spin da partícula 1 for medido, obtendo-se S_z^1+ , haverá 100% de certeza que a partícula 2 terá o spin S_z^2- , mesmo considerando que não existe mais interação entre as duas partículas.

Nessa condição, se for medido a componente de spin da partícula 2 no eixo O_x , o resultado é que haverá 50% de possibilidade do seu spin ser S_x^2- e 50% de possibilidade de seu spin ser S_x^2+ .

A figura (4.1) mostra a configuração do experimento proposto por Bohm para a medição da componente de spin do elétron 1 no eixo O_z e da componente de spin do elétron 2 no eixo O_x (ambos elétrons estão no estado conjunto singleto de spin).

A figura (4.2) mostra a configuração do experimento para a medição da componente de spin no eixo O_x tanto para o elétron 1 como para o elétron 2 (ambos elétrons estão no estado conjunto singleto de spin).

A tabela (4.1) mostra a tabela de correlação de spin dos dois elétrons emaranhados, conforme Sakurai [13].

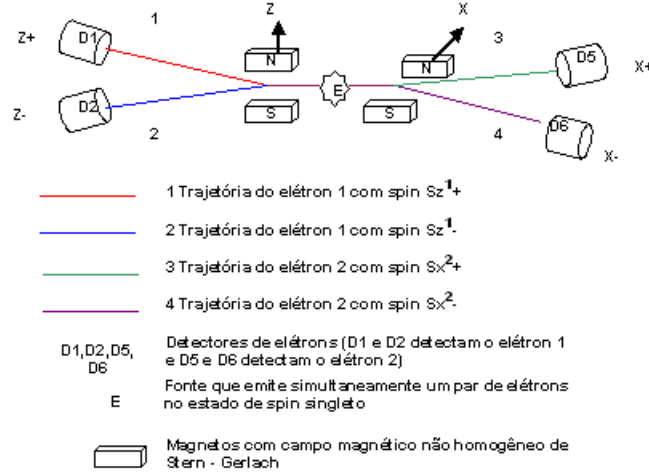


Figura 4.1: Primeira configuração do experimento de Bohm.

Se $D1$ e $D2$ medem S_z e $D3$, $D4$, $D5$ e $D6$ medem S_x , há uma correlação completamente aleatória entre as duas medidas. Se $D1$ e $D2$ medem S_x e $D3$, $D4$, $D5$ e $D6$ medem S_x , há 100% de correlação entre as duas medidas. Se $D1$ e $D2$ não fazem medidas, as medidas de $D3$, $D4$, $D5$ e $D6$ se mostram aleatórias.

É válido conhecer o formalismo utilizado na proposta de Bohm.

O estado conjunto singleto de spin dos dois elétrons no eixo O_z é representado por:

$$|\text{Spin Singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|Z+; Z-\rangle - |Z-; Z+\rangle. \quad (4.2)$$

Já para o estado conjunto de spin singleto dos dois elétrons no eixo O_x é representado por:

$$|\text{Spin Singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|X+; X-\rangle - |X-; Z+\rangle. \quad (4.3)$$

O autoestado de S_x no eixo O_z é representado por:

$$|X\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|Z+\rangle \pm |Z-\rangle. \quad (4.4)$$

Já o autoestado de S_z no eixo O_x é representado por:

$$|Z\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|X+\rangle \pm |X-\rangle. \quad (4.5)$$

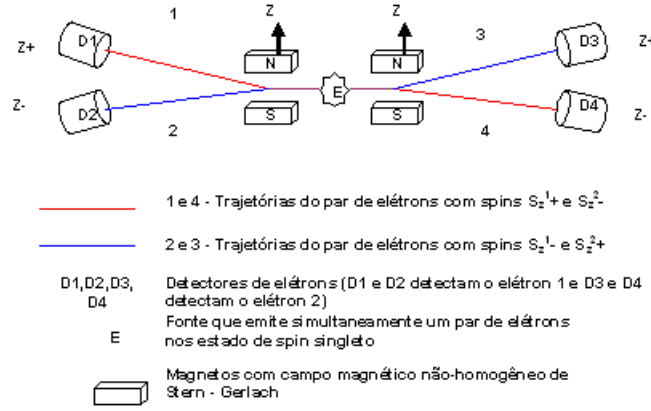


Figura 4.2: Segunda configuração do experimento de Bohm.

Essa nova configuração experimental proposta por Bohm tornou viável a construção posterior de experimentos que corroboraram as previsões da mecânica quântica.

4.3 Proposta de Einstein

Inspirado na idéia de Bohm, após o artigo de EPR receber críticas de matemáticos sobre o seu equacionamento e finalmente devido a menor dificuldade experimental em se trabalhar com observáveis discretos (como, por exemplo, o spin), Einstein [4] também elaborou um novo experimento pensado com duas partículas 1 e 2 em estado conjunto singleto de spin (spin total $S = 0$) onde os observáveis de spin (S_x^1+ , S_x^1- , S_x^2+ e S_x^2-) são medidos.

Se o spin da partícula 1 for medido sendo S_x^1+ , haverá 100% de probabilidade que a partícula 2 tenha o spin S_x^2- , mesmo considerando que não existe mais interação entre as duas partículas.

Nessa mesma condição, se for medida a componente de spin da partícula 2 no eixo O_y , o resultado será nulo (Einstein não considerava a quantização do espaço).

Dois pontos principais são colocados em questão:

1. A descrição feita pela teoria quântica é incompleta com respeito a um sistema

Tabela 4.1: Tabela de de correlação de spin dos dois elétrons emaranhados

Componentes de spin medidas por D1 e D2	Resultado da medida do elétron 1	Componentes de spin medidas por D3, D4, D5 e D6	Resultado da medida do elétron 2
Z	+	Z	-
Z	-	X	+
X	-	Z	-
X	-	Z	+
Z	+	X	-
X	+	X	-
Z	+	X	+
X	-	X	+
Z	-	Z	+
Z	-	X	-
X	+	Z	+
X	+	Z	-

individual ou,

2. Existe um acoplamento imediato de estados em entes físicos separados espacialmente.

O segundo ponto foi realmente confirmado pelos experimentos posteriores.

A figura (1.3) mostra a configuração do experimento proposto por Einstein para a medição da componente de spin da partícula 1 e da partícula 2 (ambas no estado conjunto singleto de spin) no eixo O_x .

A figura (1.4) mostra a configuração do experimento proposto por Einstein para a medição da componente de spin da partícula 1 no eixo O_x e da partícula 2 no eixo O_y (ambas no estado conjunto de spin singleto).

Nota-se que, segundo Einstein, a componente da partícula 2 nesse eixo não existe.

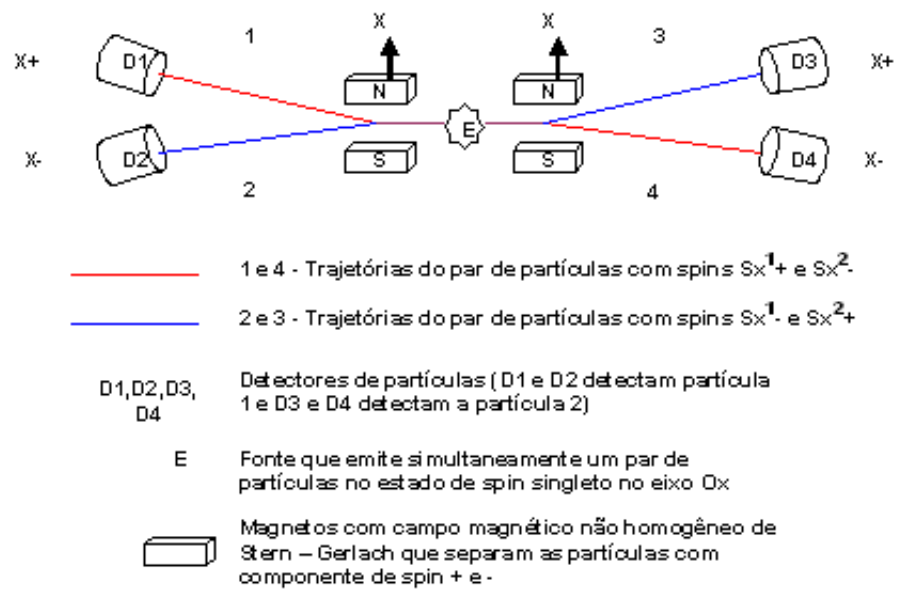


Figura 4.3: Primeira configuração do experimento de Einstein.

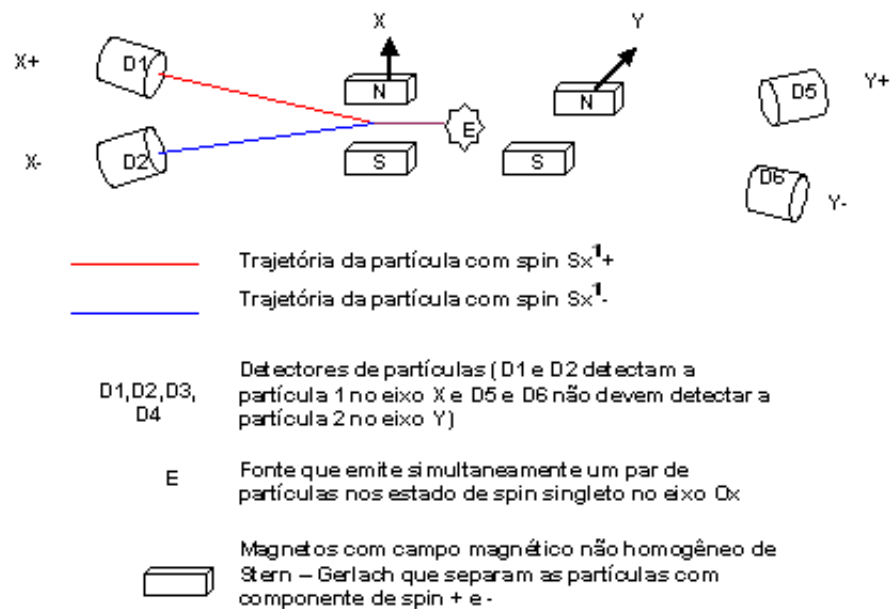


Figura 4.4: Segunda configuração do experimento de Einstein.

Capítulo 5

Formalismo Moderno

Pisa [5] reapresentou numa notação mais atual uma publicação de Schrödinger [6] intitulada “Relações de probabilidade de sistemas separados” de 1935 inspirada no artigo de EPR [1] e onde, pela primeira vez, foi cunhado o termo “*entanglement*”, em português, “entrelaçamento” ou “emaranhamento”.

A análise de Pisa parte do texto inicial do trabalho de Schrödinger, que desenvolve a mesma condição antes explorada por EPR:

“Quando dois sistemas, cujos estados conhecemos através de seus representantes (funções de onda), entram em interação física temporária devido às forças conhecidas entre eles, e quando depois de um tempo de influência mútua os sistemas voltam a se separar, então eles não mais podem ser descritos da mesma forma que anteriormente, a saber, associando cada um deles um representante próprio. Eu não chamaria isso de um, mas o traço característico da mecânica quântica, que obriga o seu afastamento por completo das linhas de pensamento clássicas. Através da interação, os dois representantes (ou funções Ψ) se tornaram emaranhados”.

Para distinguir os dois sistemas, neste formalismo pode-se rotular os dois sistemas como sendo M e m e, além disso, definem-se seus vetores de estado como sendo respectivamente $|A_0\rangle$ e $|a_0\rangle$ no instante inicial $t = 0$.

O estado conjunto desses dois sistemas que não interagem entre si nesse instante $t = 0$ é dado pelo produto tensorial:

$$|(Mm); t = 0\rangle = |A_0\rangle \otimes |a_0\rangle. \quad (5.1)$$

Supõe-se que os dois representantes sejam normalizados:

$$\langle A_0|A_0\rangle = \langle a_0|a_0\rangle = 1. \quad (5.2)$$

Assim, conseqüentemente:

$$\langle Mm; t = 0|Mm; t = 0\rangle = 1. \quad (5.3)$$

Do tempo $t = 0$ até t_1 , os dois sistemas evoluem sem interação mútua e por isso seus representantes evoluem com independência, conforme cada um de seus próprios operadores de evolução unitários como $U_M(0 \rightarrow t_1)$ para o sistema M e $U_m(0 \rightarrow t_1)$ para o sistema m de forma que para o estado conjunto é válido o seguinte:

$$|(Mm); 0 \leq t \leq t_1\rangle = U_M(0 \rightarrow t_1)|A_0\rangle \otimes U_m(0 \rightarrow t_1)|a_0\rangle \equiv |A_{t_1}\rangle \otimes |a_{t_1}\rangle. \quad (5.4)$$

A normalização do estado conjunto e dos estados de cada representante é conseguida graças ao caráter unitário do operador de evolução.

Numa próxima etapa, durante o período de tempo entre $t = t_1$ e $t = t_2$, os dois sistemas entram em interação física temporária através de forças conhecidas entre eles de forma que a evolução temporal conjunta passa a ser descrita por um operador de evolução unitário $U_{Mm}(t_1 \rightarrow t_2)$ que age sobre o estado conjunto dos dois sistemas, conforme:

$$\begin{aligned} |(Mm); t = t_2\rangle &= U_{Mm}(t_1 \rightarrow t_2) |(Mm); t = t_1\rangle \\ &= U_{Mm}(t_1 \rightarrow t_2) (|A_{t_1}\rangle \otimes |a_{t_1}\rangle). \end{aligned} \quad (5.5)$$

É neste período que os dois sistemas ficam “emaranhados”, porque o operador $U_{Mm}(t_1 \rightarrow t_2)$ não pode ser mais escrito como o produto de dois operadores de evolução independentes para cada um dos dois sistemas e tão pouco o sistema conjunto pode ser escrito como o produto de cada um dos representantes que o compõe.

Para demarcar, por exemplo, o estado emaranhado do sistema m , é utilizado seu conjunto completo e ortonormal para escrever a expansão do estado emaranhado conjunto $|(Mm); t = t_2\rangle$, através da introdução da notação $|u_n\rangle$ para o vetor desse conjunto ortogonal, onde a completeza e a ortonormalidade se exprimem por:

$$\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = \hat{I}_m \quad (5.6)$$

e

$$\langle u_n | u_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad (5.7)$$

sendo que $\hat{I}_m$ é o operador identidade de estados do sistema m e $\delta_{nn'}$ é a função usual delta de Kronecker. A expansão mencionada fica, então, na forma:

$$|(Mm); t = t_2\rangle = \sum_n |C_n; t = t_2\rangle \otimes |u_n\rangle. \quad (5.8)$$

Os estados $|C_n; t = t_2\rangle$ são os vetores no espaço de estados do sistema M (rotulados, por isso, com a letra C maiúscula) que, na base $|u_n\rangle$, definem os coeficientes:

$$\langle u_n | C_n; t = t_2 \rangle \equiv \langle u_n | \{ |(Mm); t = t_2 \rangle \}. \quad (5.9)$$

Esta notação enfatiza o emaranhamento dos dois sistemas m e M , enquanto que o produto escalar com o vetor de base $|u_n\rangle$ envolve apenas a dependência desse vetor com relação ao sistema. Como resultado disso, um vetor do sistema M depende da natureza do estado emaranhado $|(Mm); t = t_2\rangle$.

Como indica Pisa, a expansão (5.8) não é única, devido à dependência crucial da particular base $\{|u_n\rangle\}$ utilizada na sua obtenção e, ao mesmo tempo, os vetores referentes ao sistema M que funcionam como coeficientes não são em geral normalizados e nem mutuamente ortogonais como são os $|u_n\rangle$. A introdução de novos vetores normalizados resolve a questão da normalização dos $|C_n; t = t_2\rangle$, fazendo:

$$|\hat{C}_n; t = t_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\langle C_{n'}; t = t_2 | C_n; t = t_2 \rangle}} |C_n; t = t_2\rangle. \quad (5.10)$$

Nesses termos, a expansão (5.8) passa a ser escrita como:

$$|(Mm); t = t_2\rangle = \sum_n \langle \sqrt{\langle C_{n'}; t = t_2 | C_n; t = t_2 \rangle} |\hat{C}_n; t = t_2\rangle \otimes |u_n\rangle. \quad (5.11)$$

Com relação à ortogonalidade, conforme descrita por Schrödinger, é preciso que exista uma base $\{|u_n\rangle\}$ que garanta a ortogonalidade dos $|\hat{C}_n; t = t_2\rangle$ (ou equivalentemente dos $|C_n; t = t_2\rangle$).

Mais especificamente, usando a relação (5.10) que define os $|C_n; t = t_2\rangle$, deve existir alguma escolha dos $|u_n\rangle$ tal que se tenha:

$$\begin{aligned} \langle C_{n'}; t = t_2 | C_n; t = t_2 \rangle &= \{ \langle (Mm); t = t_2 | \} |u_{n'}\rangle \langle u_n| \{ (Mm); t = t_2 \} \} \\ &= \Lambda_n \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Deve-se ter, então, $\Lambda_n = \langle \hat{C}_n; t = t_2 | C_n; t = t_2 \rangle$, ou seja, os coeficientes numéricos resultantes da normalização em (5.11) serão, na realidade, $(\Lambda_n)^{\frac{1}{2}}$.

A viabilidade da relação (5.12) pode ser testada com a inserção de um conjunto ortonormal e completo qualquer do espaço dos estados do sistema M , no seu segundo membro:

$$\sum_P |U_P\rangle \langle U_P| = \hat{I}_M, \quad (5.13)$$

com

$$\langle U_P | U_{P'} \rangle = \delta_{PP'}. \quad (5.14)$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
\langle C_{n'}; t = t_2 | C_n; t = t_2 \rangle &= \sum_P \langle (Mm); t = t_2 | U_P \rangle \otimes |u_{n'}\rangle \langle u_n| \otimes \langle U_P | (Mm); t = t_2 \rangle \\
&= \langle u_n | \left(\sum_P \langle U_P | \{ | (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 | \} | U_P \rangle \right) | u_{n'} \rangle \\
&\equiv \langle u_n | \rho_m(t = t_2) | u_{n'} \rangle = \Lambda_n \delta_{nn'}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Para haver a equivalência, o vetor $|u_n\rangle$ tem que ser autofunção do operador $\rho_m(t = t_2)$. O assim chamado *operador densidade reduzido* do sistema m no tempo $t = t_2$ é, então, definido por essa última passagem:

$$\rho_m(t = t_2) = \sum_P \langle U_P | \{ | (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 | \} | U_P \rangle. \tag{5.16}$$

Esse operador representa a soma dos elementos de matriz diagonais do projetor sobre o estado emaranhado, $| (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 |$, na base referente ao sistema M , $\{|U_P\rangle\}$, mas é independente da particular escolha feita para a base. Para verificar tal propriedade, uma relação de completeza de uma outra base ortonormal no espaço de estados do sistema M pode ser inserida usando o caráter unitário da transformação entre as duas bases. Pode-se escrevê-lo, independente da introdução de qualquer base referente ao sistema M , como um traço parcial de $| (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 |$

$$\rho_m(t = t_2) = \text{Tr}_M (| (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 |). \tag{5.17}$$

O projetor $| (Mm); t = t_2 \rangle \langle (Mm); t = t_2 |$ é chamado *operador densidade completo* do conjunto dos dois sistemas, M e m .

O operador densidade reduzido deve ser diagonal na base dos $|u_n\rangle$ para satisfazer a relação (5.12), ou seja, dessa forma temos que:

$$\langle u_n | \rho_m(t = t_2) | u_N \rangle = \Lambda_n \delta_{nN}. \tag{5.18}$$

Por equivalência é preciso então que os $|u_n\rangle$ sejam *autovetores* do operador densidade reduzido associado ao sistema minúsculo no tempo $t = t_2$, sendo que os Λ_n serão, portanto, os autovalores correspondentes. Os autovetores e autovalores de $\rho_m(t_1 = t_2)$ dependem do tempo como o próprio operador $\rho_m(t_1 = t_2)$, de forma que é conveniente escrevê-los como $|u_n; t = t_2\rangle$ e $\Lambda_n(t_1 = t_2)$.

Para esta escolha da base relativa ao sistema m , temos a seguinte expansão:

$$| (Mm); t = t_2 \rangle = \sum_n \sqrt{\Lambda_n(t = t_2)} |\hat{C}_n; t = t_2 \rangle \otimes |u_n; t = t_2 \rangle, \tag{5.19}$$

sendo que $\langle \hat{C}_n; t = t_2 | \hat{C}_n t = t_2 \rangle = \delta_{nn'}$.

Os autovetores ortonormais do espaço de estados do sistema M são, então, autovetores do operador densidade reduzido para esse outro sistema conforme:

$$\rho_M(t = t_2) = Tr_m(|(Mm); t = t_2\rangle\langle(Mm); t = t_2|). \quad (5.20)$$

Os dois operadores densidade reduzidos têm também os mesmos autovalores.

A expansão (5.19) é chamada por Schrödinger de “expansão bi-ortogonal” e ele a propõe como a que nos revela verdadeiramente em que consiste o emaranhamento (“gives us true insight into the entanglement”).

Em termos da expansão, a evolução do estado conjunto dos dois sistemas interagentes de $t = t_1$ até $t = t_2$ é descrita como:

$$|A_{t_1}\rangle \otimes |a_{t_1}\rangle \rightarrow \sum_n \sqrt{\Lambda_n(t = t_2)} |\hat{C}_n; t = t_2\rangle \otimes |u_n; t = t_2\rangle. \quad (5.21)$$

A forma produto válida para o estado em $t = t_1$ pode ser reconhecida também como a forma da expansão bi-ortogonal válida nesse instante, em que cada um dos sistemas tem ainda seu estado descrito por um representante próprio. Os representantes são as autofunções correspondentes dos respectivos operadores reduzidos e os operadores densidade reduzidos têm então um único valor não nulo (igual a 1).

O emaranhamento consiste na necessidade de usar vários representantes independentes (ortogonais) para cada um dos sistemas, sendo que esses representantes estão “correlacionados” aos pares, um para cada sistema, com o mesmo autovalor, sendo que cada um desses pares recebe ainda um peso determinado pelo autovalor correspondente dos operadores reduzidos. Em outras palavras, temos:

$$Tr_m \rho |u_n^M\rangle = \lambda_n^M |u_n^M\rangle \quad (5.22)$$

e

$$Tr_M \rho |u_n^m\rangle = \lambda_n^m |u_n^m\rangle. \quad (5.23)$$

Como:

$$\rho = \sum \Lambda_{n,N,n',N'} |u_N^M\rangle \otimes |u_n^m\rangle \langle u_{n'}^m| \otimes \langle u_{n'}^M|, \quad (5.24)$$

considerando as equações (5.22) e (5.23), podemos escrever este operador como:

$$\rho = \sum \Lambda_{n,N} |u_N^M\rangle \otimes |u_n^m\rangle \langle u_n^m| \otimes \langle u_n^M| \quad (5.25)$$

A situação seguinte dos sistemas m e M nesse formalismo é que a interação física temporária que existiu entre eles durante o período $t = t_1$ a $t = t_2$ cesse a partir do

tempo $t = t_2$, de forma que passem a evoluir conforme os seus próprios operadores unitários de evolução.

O processo de emaranhamento então cessa, mas os vetores ortonormais $|\hat{C}_n\rangle$ e $|u_n\rangle$ continuam a evoluir conforme:

$$|\hat{C}_n; t > t_2\rangle = U_M(t_2 \rightarrow t) |\hat{C}_n; t = t_2\rangle \quad (5.26)$$

e também:

$$|u_n; t > t_2\rangle = U_m(t_2 \rightarrow t) |u_n; t = t_2\rangle. \quad (5.27)$$

A interrupção do processo de emaranhamento significa apenas que a evolução temporal dos autovalores dos operadores densidade reduzidos cessa.

O conjunto dos dois sistemas permanece, portanto, emaranhado e seu estado é descrito pela expansão “bi-ortonormal”:

$$|(Mm); t > t_2\rangle = \sum_n \sqrt{\Lambda_n(t = t_2)} |\hat{C}_n; t > t_2\rangle \otimes |u_n; t > t_2\rangle. \quad (5.28)$$

Os pesos associados aos vários termos da expansão expressos em termos dos autovalores Λ_n obtidos em $t = t_2$ vão permanecer agora constantes, de forma que o argumento temporal poderá ser omitido para aliviar a notação.

Schrödinger [6] se interessa pelo processo chamado de “desemaranhamento”, que ocorre através de medições feitas sobre um dos sistemas emaranhados. Sobre esse fenômeno, Schrödinger escreveu em seu trabalho de 1935 [6]:

*“Its sinister importance is due to its being involved in every measuring process and therefore forming the basis of the quantum theory of measurement, threatening us thereby with at least a **regressus in infinitum**, since it will be noticed that the procedure itself involves measurement”.*

Esta afirmação de E. Schrödinger demonstra a importância e a relação intrínseca que o sistema de duas partículas emaranhadas tem com o processo de medida em mecânica quântica.

A expansão (5.28) descreve as correlações existentes entre os dois sistemas emaranhados e a implicação disto é a possibilidade de determinar o estado quântico de um dos sistemas, não observado, através da medição de um sistema observado, mesmo que não mais interações existam entre eles.

No caso geral em que todos os autovalores $\Lambda \neq 0$ são distintos, isto é, os autovalores não nulos dos operadores densidade reduzidos são livres de degenerescência, os vetores ortonormais $|\hat{C}_n; t\rangle$ e $|u_n; t\rangle$ que aparecem em (5.28) são univocamente determinados.

Neste caso, se os $|u_n; t\rangle$ são também autovetores de um observável (ou de um conjunto de observáveis compatíveis) do sistema m , uma medida desse observável determina o vetor de estado do sistema m como sendo um desses vetores (correspondente ao autovalor ou autovalores obtidos na medida) e, ao mesmo tempo, o estado do sistema M fica determinado como aquele que é representado pelo vetor de estado correspondente na expansão “bi-ortogonal”.

Um caso particular ao desse caso geral analisado anteriormente é aquele em que todo os valores $\Lambda_n \neq 0$ são iguais e, portanto, os respectivos autovetores $|\hat{C}_n; t\rangle$ e $|u_n; t\rangle$ são definidos a menos de uma transformação unitária arbitrária.

Isso significa que o representante do sistema M será determinado univocamente quando for determinado o representante do sistema m , através de qualquer medida feita sobre o sistema m . Schrödinger mostra em seu trabalho de 1936 que é possível, então, selecionar o estado de um dos sistemas (por exemplo, do sistema M) de modo que ele seja representado por um vetor pré-determinado, através de um processo de medida realizado sobre o sistema m .

O representante $|X\rangle$ escolhido para o estado do sistema M pode ser, em princípio, tomado arbitrariamente, sujeito apenas à condição de que ele seja exprimível como uma combinação linear dos estados $|\hat{C}_n; t\rangle$ que atua na expansão “bi-ortogonal” (5.28), ou seja:

$$|X\rangle = \sum_{n(\Lambda_n \neq 0)} X_n |\hat{C}_n; t\rangle, \quad (5.29)$$

$$\sum_{n(\Lambda_n \neq 0)} |X_n|^2 = 1. \quad (5.30)$$

Para determinar o que deve ser feito com relação ao sistema m para obter esse estado no sistema M , basta notar que a expansão (5.28) nos permite escrever seus coeficientes $C_n(t)$ na forma:

$$C_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_n}} \langle u_n; t | \{ | (Mm); t \rangle \}, \quad (5.31)$$

e:

$$\langle u_n; t | X \rangle = \sum_{n(\Lambda_n \neq 0)} \frac{X_n}{\sqrt{\Lambda_n}} \langle u_n; t | \{ | (Mm); t \rangle \}. \quad (5.32)$$

O representante normalizado do estado do sistema m é identificado pela expressão anterior e é correlacionado com o representante $|X\rangle$ do sistema M , conforme:

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n(\Lambda_n \neq 0)} \frac{X_n^*}{\sqrt{\Lambda_n}} |u_n; t\rangle \quad (5.33)$$

e

$$N \equiv \sum_{n' (\Lambda_n \neq 0)} \frac{|X_{n'}|^2}{\Lambda_{n'}}. \quad (5.34)$$

Então, o sistema M é conduzido ao estado $|X\rangle$ através de uma medida de um observável $|x\rangle$ que seja um autovetor do operador densidade do sistema m . Nessa medida é obtido um autovalor correspondente a esse autovetor com probabilidade que isso ocorra como sendo $P_x = \frac{1}{N}$.

Esse procedimento é comentado por Schrödinger de forma ambígua:

“Sem dúvida, a situação descrita aqui é, na mecânica quântica atual, uma característica necessária e indispensável. Surge, então, a questão de que seja assim também na Natureza. Eu não estou certo de que haja evidência experimental suficiente para isso”.

O autor comenta posteriormente a respeito de experiências envolvendo a preparação e observação de estados quânticos, indicando a comprovação dos emaranhamentos quânticos e cita, inclusive, o processo de emaranhamento com o “ambiente”, o que leva a ocultação de estados quânticos.

Capítulo 6

O teste da desigualdade de Bell e o teletransporte

6.1 Teorias de Variáveis Ocultas

Os textos seguintes sobre as Teorias de Variáveis Ocultas e a desigualdade de Bell são baseados no trabalho de Pessoa [14].

O matemático von Neumann havia demonstrado ser impossível haver uma teoria de variáveis ocultas que obtivesse todas as previsões da teoria quântica.

Daqui em diante chamaremos as Teorias de Variáveis Ocultas apenas como TVO.

Uma TVO é qualquer teoria que adiciona grandezas invisíveis à mecânica quântica - parâmetros ocultos como a posição e a velocidade de uma partícula, segundo a interpretação de Louis de Broglie, e que dessa maneira consegue retornar ao ideal da Física Clássica, em que todas as quantidades físicas podem ser conhecidas simultaneamente e que seja determinista, no sentido em que os eventos não ocorram ao acaso ou com uma dada probabilidade de ocorrerem. Em outras palavras, se num experimento quântico conhecêssemos o estado quântico e o valor das variáveis ocultas, poderíamos prever com exatidão o resultado de qualquer medição feita em um objeto individual.

Mas, von Neumann provou que tal teoria não poderia existir. No entanto, em 1952, o norte-americano David Bohm apresentou uma nova versão da antiga interpretação de de Broglie, uma interpretação realista e com variáveis ocultas (as posições e velocidades das partículas) que era consistente com a mecânica quântica, gerando as mesmas previsões que esta.

Quanto à prova de von Neumann, Bohm explicou que em sua teoria as variáveis ocultas relevantes não pertenciam apenas ao objeto quântico, mas também ao aparelho de medição. Assim, continuava sendo verdade que, dado o estado quântico e o valor das variáveis ocultas, o resultado de uma medição seria determinado (apesar de ser impossível conhecer todas as variáveis ocultas relevantes). Ocorre que quando

medimos a posição x ou a velocidade V_x , o arranjo experimental muda, e assim muda também o conjunto de variáveis ocultas relevantes. Essa propriedade da teoria de David Bohm é chamada de contextualismo, e ela é suficiente para escapar da prova de impossibilidade de von Neumann*.

6.2 A desigualdade de Bell

A teoria de Bohm tem uma propriedade que a afasta da Física Clássica: ela viola a condição de localidade.

Ou seja, um evento que ocorre localmente pode influenciar instantaneamente o estado quântico num ponto muito afastado.

É assim que a teoria de Bohm resolve o paradoxo de EPR: sua teoria não seria incompleta (a mecânica quântica seria), apesar de satisfazer a condição do realismo, porque ela viola a condição de localidade.

O norte-irlandês John Stuart Bell analisou profundamente esta característica da teoria de Bohm, e suspeitou que ela seria uma característica geral de qualquer TVO consistente com a Teoria Quântica. Antes de explorar essa possibilidade, porém, escreveu um artigo importante no qual esclareceu as limitações de provas de impossibilidade como a de von Neumann. E no artigo seguinte, publicado em 1964, derivou uma desigualdade envolvendo grandezas mensuráveis para pares correlacionados de partículas que seria obedecida por qualquer TVO local, mas que seria violada pela Teoria Quântica.

Dentro de uma década, experimentos mostraram que a natureza de fato viola essas desigualdades, em acordo com a Teoria Quântica, e que portanto teorias de variáveis ocultas locais são incorretas.

6.3 Aspect demonstra a violação da desigualdade de Bell

Aspect [8] e colaboradores realizaram no início da década de 1980 um experimento real baseado no experimento pensado idealizado por Einstein, Podolsky, Rosen e Bohm, que comprovou a violação das desigualdades de Bell [7].

*Bohm trabalhou na Universidade de São Paulo entre 1952 e 1955, fugindo do Macartismo.

Morando no Brasil, colaborou com vários físicos brasileiros, e tentou estender sua teoria para o domínio relativístico, projeto este que não teve muito sucesso, e explica porque poucos físicos aderiram à sua abordagem.

O aparato experimental mostrado na figura (6.1) indica uma fonte (S) que emite feixes de fótons em estado conjunto singlete em orientações opostas. Os feixes passam por dois conjuntos ópticos (polarizadores de calcita) posicionados cada qual numa orientação e são divididos na saída dos mesmos em dois feixes (um paralelo e outro perpendicular) que terminam cada qual num fotomultiplicador (P.M.) contendo um sensor. Monitores eletrônicos são ligados a cada um dos quatro sensores e contam as coincidências (*coincidences*) e não coincidências (*singles*).

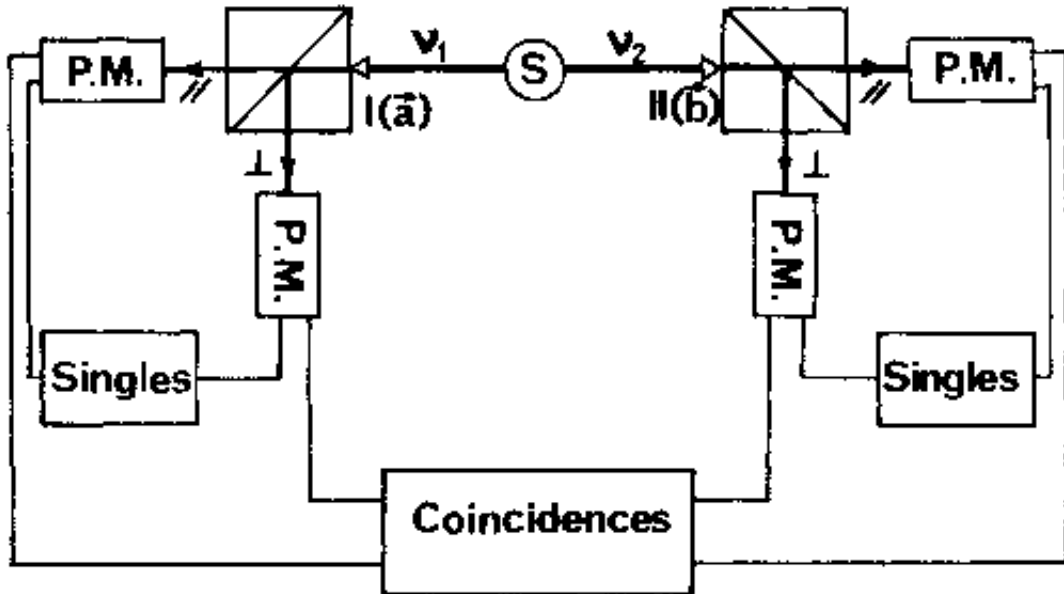


Figura 6.1: Esquema do experimento de Aspect.

As contagens de coincidências e não coincidências são feitas com relação à polarização entre os fótons que se propagam para a direita e os fótons que se propagam para a esquerda.

Através da ação de comutadores acústico-ópticos ultra-rápidos, os dois polarizadores de calcita desviam de forma independente os fótons para os fotomultiplicadores paralelos e perpendiculares contendo os sensores.

O ângulo relativo entre os dois polarizadores pode ser variado.

Devido aos quatro sensores existentes (dois na direita e dois na esquerda), quatro medições podem ser feitas para dois fótons disparados (um para a direita e outro para a esquerda) a partir da fonte (polarização $+1$ para os fótons desviados na direção paralela e polarização -1 para os fótons desviados na direção perpendicular).

O tempo de comutação (mudança dos polarizadores no desvio dos feixes de luz)

dos comutadores acústico-ópticos (5 ns) é bem menor que o tempo de propagação dos fótons da fonte até os conjuntos ópticos (20 ns) de forma que não há tempo hábil para haver troca de informações sobre mudanças ou ajustes desses comutadores que permitam aos fótons simular correlações entre eles, utilizando meios estritamente locais (interações locais conhecidas, cuja velocidade de propagação é igual à da luz no vácuo).

Vamos denotar por $P_{\pm,\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ a probabilidade de encontrar o primeiro fóton na direção $\vec{a}$ com probabilidade ± 1 e o segundo na direção $\vec{b}$ com probabilidade ± 1 . Então, pode-se definir o coeficiente de correlação das medidas nas duas partículas como:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (6.1)$$

Se a correlação existente entre os fótons no estado singleto (emaranhados) é local, ou seja, está limitada a uma velocidade de interação igual à da luz no vácuo, então os limites máximos da média dos coeficientes de correlação (S) são dados pelas desigualdades de Bell

$$-2 \leq S \leq 2, \quad (6.2)$$

sendo que a média S é calculada conforme

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}'), \quad (6.3)$$

que envolve quatro medidas em quatro direções diferentes. Nesta definição, E é o coeficiente de correlação e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores que representam orientações arbitrárias no experimento, sendo $\vec{a}$ o índice para o sensor esquerdo e paralelo, $\vec{a}'$ o índice para o sensor esquerdo perpendicular, $\vec{b}$ o índice para o sensor direito paralelo e $\vec{b}'$ para o sensor direito perpendicular.

Se a correlação existente entre os fótons obedece à previsão da mecânica quântica, ou seja, a correlação existente entre os fótons no estado singleto é não-local (ação instantânea entre os dois fótons), então a desigualdade de Bell é violada e os limites da média dos coeficientes de correlação serão

$$S = \pm 2\sqrt{2}. \quad (6.4)$$

O conflito entre as duas previsões foi resolvido pelas medições e os resultados foram plenamente favoráveis à mecânica quântica.

O ponto de maior conflito entre as duas previsões ocorre nos ângulos entre os polarizadores $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}') = (\vec{a}', \vec{b}') = 22,5^\circ$ e $(\vec{a}, \vec{b}') = 67,5^\circ$, sendo que a média de cinco medições foi de

$$S_{\text{exp}} = 2,697 \pm 0,015. \quad (6.5)$$

Tal valor indica a violação dos limites indicados nas desigualdades de Bell e é muito próximo do valor previsto pela mecânica quântica.

A pequena diferença entre a média dos valores medidos e a média dos valores previstos pela mecânica quântica ocorre em função dos polarizadores não serem ideais, ou seja, uma parte dos fótons não é detectada porque os polarizadores não são totalmente eficientes.

O gráfico da figura (6.2) mostra as correlações medidas em função dos ângulos relativos dos sensores de polarização, onde a curva pontilhada indica a previsão da mecânica quântica.

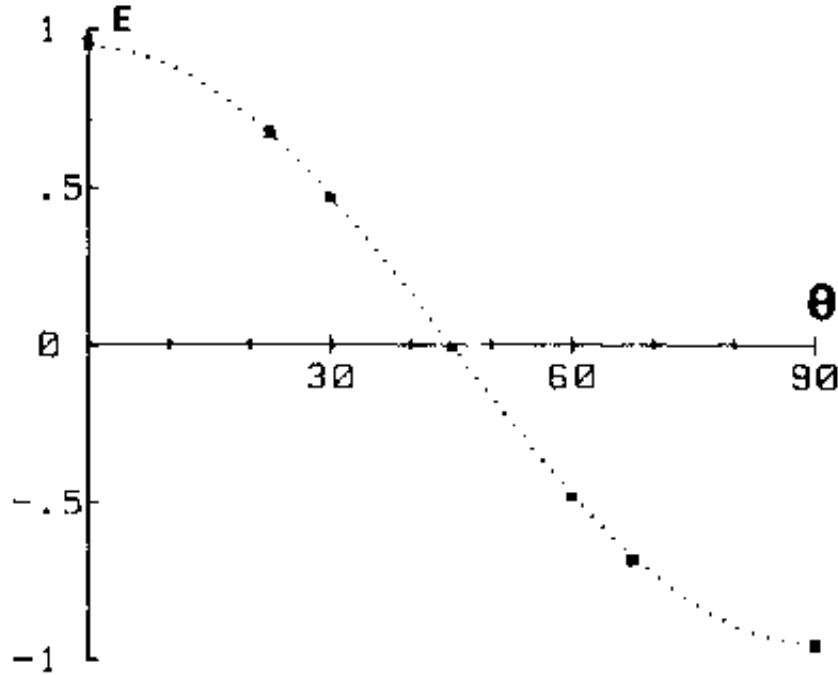


Figura 6.2: Gráfico de correlações medidas de Aspect em função dos ângulos relativos entre os sensores de polarização.

Para sensores de polarização simétricos, a previsão da mecânica quântica é dada pela equação do coeficiente de correlação

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = 0,984 \frac{(T_1^{\parallel} - T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} - T_2^{\perp})}{(T_1^{\parallel} + T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} + T_2^{\perp})} \cos 2(\vec{a}, \vec{b}), \quad (6.6)$$

onde os coeficientes $T_1^{\parallel}$ e $T_2^{\parallel}$ são respectivamente os coeficientes de transmissão dos feixes de fótons da direita e da esquerda com polarização paralela e os coeficientes

$T_1^\perp$ e $T_2^\perp$ são respectivamente os coeficientes de transmissão dos feixes de fótons da direita e da esquerda com polarização perpendicular.

O experimento de Aspect e de seus colaboradores demonstrou então que os emaranhamentos quânticos são de fato reais e que a mecânica quântica está correta em suas previsões, não podendo os fenômenos por ela explicados serem também descritos por TVO locais que consideram velocidades luminarias.

6.4 Teletransporte: Um exemplo de aplicação envolvendo emaranhamentos quânticos

Bennett, da divisão de pesquisa da IBM, e colaboradores publicaram um artigo em 1993 na Physical Review Letters [9], mostrando a possibilidade de teletransporte de estados quânticos.

A proposta era a de desmontar um estado quântico desconhecido $|\Phi\rangle$ e reconstruí-lo por meio de uma informação puramente clássica e outra puramente não-clássica (estado EPR). Uma mensageira chamada Alice e um destinatário chamado Bob compartilham um par EPR. As partículas do sistema viajam em sentidos contrários e Alice faz uma medida de spin de sua partícula EPR e envia a Bob seu resultado. Assim, Bob pode converter o estado de sua partícula EPR numa réplica exata do estado desconhecido $|\Phi\rangle$, destruído por Alice.

Existem dois modos de passar informação para Bob:

1. mandar a partícula no estado $|\Phi\rangle$.
2. Fazer esta interagir unitariamente com uma das partículas do par EPR num estado conhecido como $|a_0\rangle$ de modo que a partícula original é deixada no estado padrão $|\Phi_0\rangle$ e o sistema é deixado num estado desconhecido $|a\rangle$ contendo a informação completa sobre $|\Phi\rangle$ (esse estado é destruído por Alice no processo de medição).

Se Alice manda a partícula do sistema no estado $|a\rangle$ para Bob, ele pode reverter a operação de Alice e preparar uma réplica do estado $|\Phi\rangle$. Para tal operação reversa, Bob se utiliza da partícula companheira do par EPR.

O diagrama de espaço-tempo para o teletransporte quântico na figura (6.3) mostra mais detalhes do processo. Como usual, o tempo é incrementado de baixo para cima. As linhas sólidas representam um par de bits clássicos, as linhas tracejadas são os pares de partículas EPR (que podem ser de tipos diferentes) e as linhas

onduladas são as partículas quânticas no estado $|\Phi\rangle$. Alice (A) efetua uma medição quântica e Bob (B) se utiliza de uma operação unitária [†].

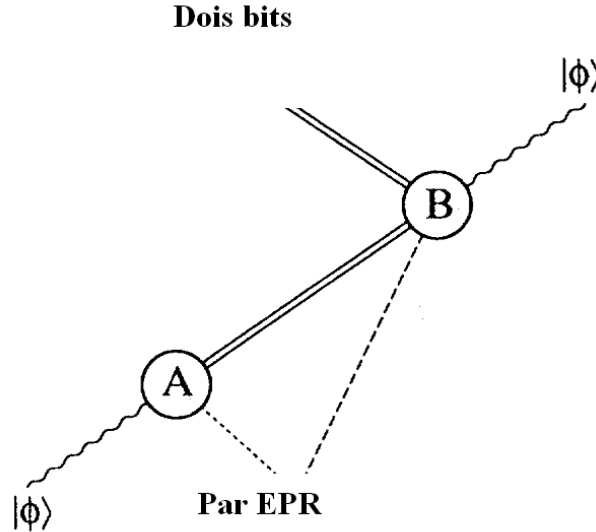


Figura 6.3: Diagrama de espaço-tempo para o teletransporte quântico.

A figura (6.4) mostra um aparato de teletransporte com luz laser no estado “squeezed”.

No estado “squeezed” a luz laser possui uma redução do ruído quântico e a distribuição de fótons é muito concentrada numa determinada frequência (alta coerência).

Dois feixes emaranhados *i* e *ii* (chamados também de feixes EPR) são gerados pela combinação de dois feixes de luz laser no estado “squeezed” num divisor óptico 50/50.

Os feixes EPR se propagam pela estação mensageira Alice, onde são combinados num divisor óptico 50/50 com um outro feixe de entrada num estado desconhecido e amplitude complexa.

Alice usa dois conjuntos de detectores para fazer uma medida das amplitudes do estado de Bell desse feixe que foi combinado.

Por causa do emaranhamento entre o estado conjunto dos feixes EPR, a detecção feita por Alice colapsa o estado do feixe propagado para Bob (feixe *ii*).

Depois de receber classicamente o resultado de Alice, Bob fica habilitado a construir o estado que foi teleportado através de um simples deslocamento de fase do

[†]Bob deve executar uma medida ou uma rotação, por meio de operadores unitários, que seja ajustada à informação recebida de Alice.

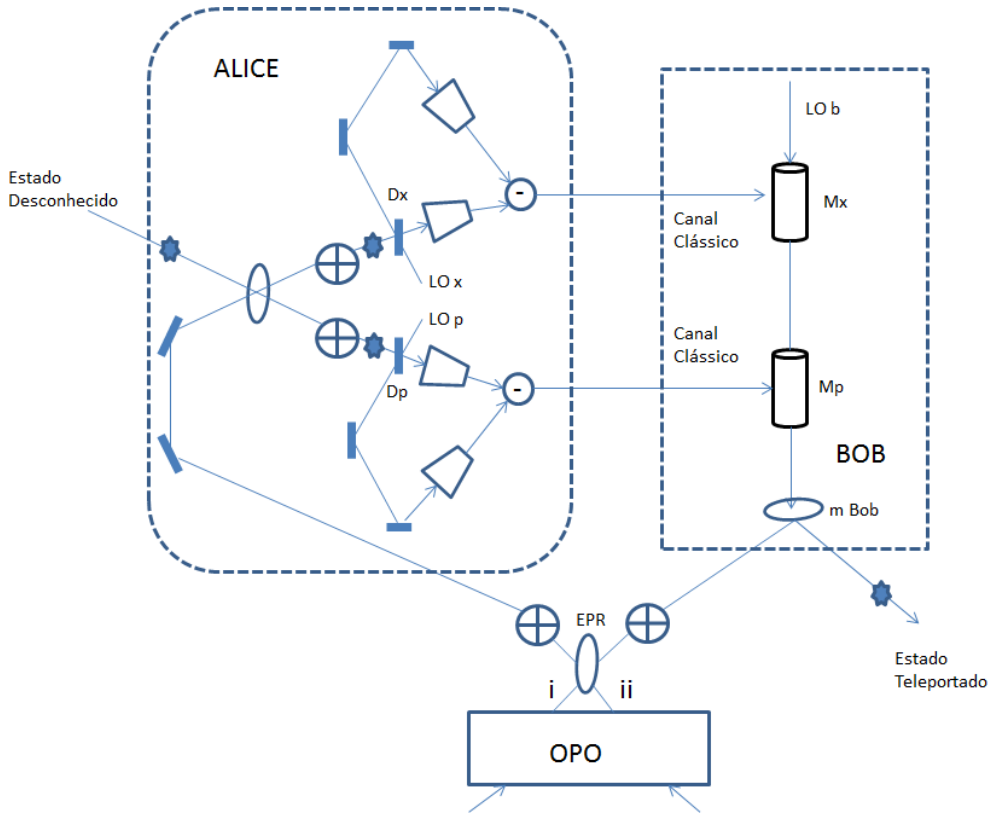


Figura 6.4: Esquema experimental do teletransporte quântico.

feixe EPR (ii).

A partícula 1 é representada pelo seguinte estado:

$$|\Phi_1\rangle = a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle, \quad (6.7)$$

onde os coeficientes obedecem à relação $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

O estado emaranhado (EPR) entre a partícula 2 encaminhada para Alice e partícula 3 encaminhada para Bob é representado por:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle). \quad (6.8)$$

Os chamados estados de Bell combinados entre a partícula 1 (de estado desconhecido) e a partícula 2 (partícula emaranhada ou EPR encaminhada para Alice) são representados por:

$$|\Psi_{12}^+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle), \quad (6.9)$$

$$|\Phi_{12}^\pm\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle). \quad (6.10)$$

O estado completo $|\Psi_{123}\rangle$ das três partículas antes da medição feita por Alice é

dado por:

$$|\Psi_{123}\rangle \equiv |\Phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle, \quad (6.11)$$

cujo resultado nos fornece:

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}} (|\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle). \quad (6.12)$$

Nesta equação, cada produto direto entre os vetores de estado 1 e 2 pode ser expresso em termos dos vetores da base dos operadores de Bell $|\Psi_{12}^\pm\rangle$ e $|\Phi_{12}^\pm\rangle$, de modo que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{1}{2} \left[|\Psi_{12}^-\rangle (-a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle) + |\Psi_{12}^+\rangle (-a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) + \right. \\ &\quad \left. + |\Phi_{12}^-\rangle (a|\downarrow_3\rangle + b|\uparrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^+\rangle (a|\downarrow_3\rangle - b|\uparrow_3\rangle) \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Após a medição feita por Alice do estado 2, a partícula 3 enviada para Bob e que compõe o par EPR (a outra partícula rotulada como 2 foi enviada para Alice) é projetada para um dos quatro estados puros indicados nos quatro termos da equação anterior, a saber:

$$-|\phi_3\rangle \equiv -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle. \quad (6.14)$$

sendo que cada um possui probabilidade $\frac{1}{4}$.

Se Bob obtiver através de uma medição um dos dois estados indicados pelos dois termos à esquerda da soma na equação que representa o estado completo $|\Psi_{123}\rangle$ então, o estado $|\uparrow_1\rangle$ representa o estado desconhecido $|\Phi\rangle$, senão se obtiver um dos dois termos indicados pelos dois termos à direita da soma na equação que representa o estado completo $|\Psi_{123}\rangle$, o estado $|\downarrow_1\rangle$ é que representa o estado desconhecido $|\Phi\rangle$. Resumindo, o estado $|\Phi\rangle$ será completamente teletransportado de Alice para Bob.

Ficou demonstrado então que o teletransporte é uma das aplicações possíveis dos emaranhamentos quânticos, assim como outras (não demonstradas aqui) relacionadas principalmente à computação quântica, que utilizam, em geral, variáveis discretas (com os estados quânticos nessas aplicações relacionados aos níveis lógicos).

Capítulo 7

Emaranhamento quântico em um potencial

Os estudos atuais sobre os emaranhamentos quânticos estão principalmente focados em computação quântica, que utilizam observáveis discretos como o spin.

Existe, então, um grande campo para estudos da evolução temporal de sistemas de duas partículas emaranhadas submetidas a um dado potencial.

O ponto de partida desses estudos será mostrado a seguir através de um modelo muito simples.

Duas partículas diferentes com o mesmo módulo do momento e emaranhadas quanticamente são emitidas em sentidos contrários ao longo do eixo x após o tempo $t = t_0$ e com a condição de que não possuem mais interação entre si e com o meio exterior e também estão limitadas a um único grau de liberdade (eixo x).

Na posição $x = 0$, existe uma barreira de potencial infinito que é atingida no tempo $t = t_1$ pela partícula 1 que se desloca no sentido positivo do eixo x .

A figura (7.1) mostra um esquema genérico indicando o deslocamento das partículas e a posição arbitrária L da barreira de potencial. Em nossos cálculos, consideraremos, sem perda de generalidade, $L = 0$.

A questão que se coloca é o que ocorrerá a partir do instante $t = t_1$ com a partícula 2 que se desloca no sentido negativo do eixo x ?

Para tentar responder essa questão, será preciso fazer uma análise desse sistema em dois períodos de tempo, que compreendem o período da emissão das duas partículas até antes do choque da partícula 1 na barreira de potencial ($t_0 \leq t < t_1$) e o período do choque da partícula 1 na barreira de potencial em diante ($t \geq t_1$).

No período $t_0 \leq t < t_1$, a função de onda do sistema combinado das duas partículas $\Psi(x_1, x_2)$, ou seja, do sistema de duas partículas emaranhadas quanticamente, é o produto da função de onda que representa na mecânica quântica cada uma das partículas antes de estarem emaranhadas:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_1(x_1) \Psi_2(x_2) = Ae^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}, \quad (7.1)$$

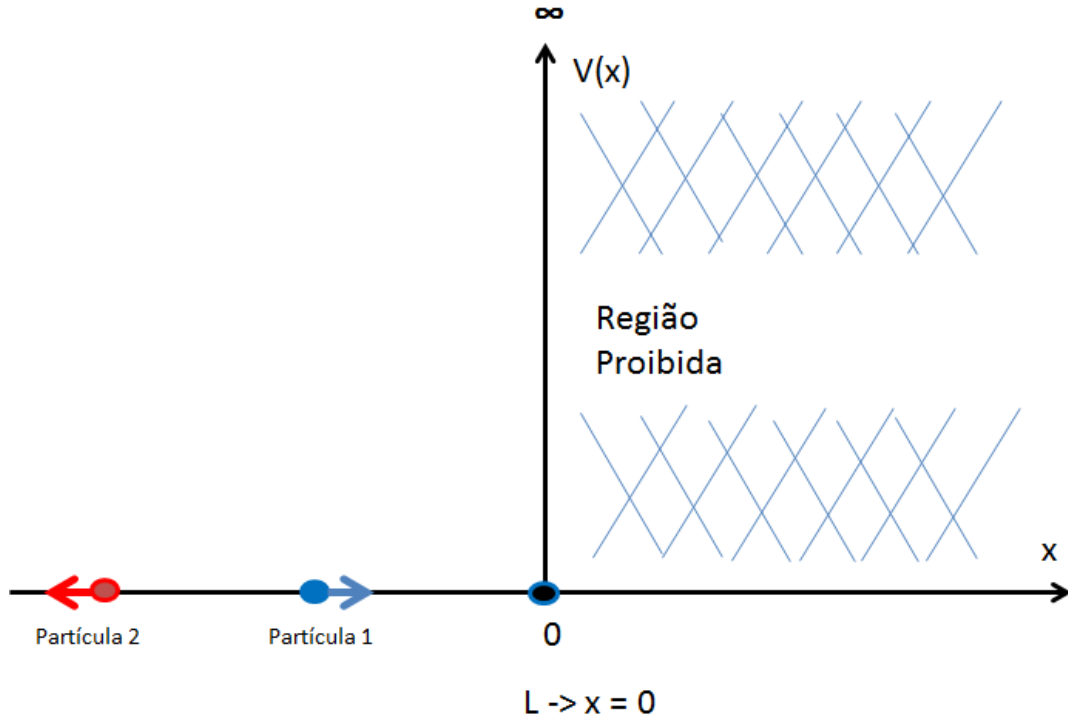


Figura 7.1: Esquema do sistema unidimensional de duas partículas emaranhadas, com a da direita se movendo em direção a uma barreira de potencial.

onde a função de onda da partícula 1 que se desloca na direção $+x$ é dada por:

$$\Psi_1(x_1) = Be^{ik_1x_1} \quad (7.2)$$

e a função de onda da partícula 2 que se desloca na direção $-x$ é dada por:

$$\Psi_2(x_2) = Ce^{-ik_2x_2}, \quad (7.3)$$

onde k_1 e k_2 são, respectivamente, os números de onda das funções de onda das partícula 1 e 2 e B e C são, respectivamente, as amplitudes das funções de onda da partícula 1 e 2.

According to the procedure of the reference [11], the wave function $\Psi_1(x_1, x_2)$ must be the solution of the Schrödinger equation and it represents the joint quantum state of the two entangled free particles:

$$\hat{H}\Psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} \Psi_i - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} \Psi_i - E\Psi_i = 0 \quad (7.4)$$

Solving separately each term in the right side of the equality:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} \Psi_i = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d}{dx_1} \left[\frac{d}{dx_1} \left(Ae^{ik_1x_1 - k_1x_1} \right) \right] = \frac{\hbar^2}{2m_1} k_1^2 \Psi_i, \quad (7.5)$$

That is $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m_1} k_1^2$ and

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx_2^2} \Psi_i = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d}{dx_2} \left[\frac{d}{dx_2} \left(Ae^{ik_1x_1 - k_1x_1} \right) \right] = \frac{\hbar^2}{2m_2} k_2^2 \Psi_i, \quad (7.6)$$

that is $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m_2} k_2^2$.

Substituting each term in the equation of Schrödinger again, we got the follow:

$$E_1 \Psi_i + E_2 \Psi_i - E \Psi_i = 0 \implies E_1 \Psi_i + E_2 \Psi_i = E \Psi_i \implies E_1 + E_2 = E. \quad (7.7)$$

The parameters m_1 e m_2 are respectively the mass of the particles 1 and 2, $\hbar$ is the usual Planck constant divided by 2π .

Então, a função $\Psi_i(x_1, x_2)$ é mesmo a solução da equação de Schrödinger, ou seja, é sua autofunção e os autovalores de energia E_1 e E_2 somados correspondem ao valor total E de energia do sistema.

Em mecânica quântica, as grandezas físicas observáveis são representadas por entes matemáticos chamados operadores e é muito interessante comparar os valores dos momentos da partícula 1 e da partícula 2 nos períodos $t_0 \leq t < t_1$ e $t \geq t_1$, usando para isto o operador momento $\hat{P}_{x_1}$ para a partícula 1 e o operador momento $\hat{P}_{x_2}$ para a partícula 2.

Os operadores $\hat{P}_{x_1}$ e $\hat{P}_{x_2}$ são representados por:

$$\hat{P}_{x_1} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1}, \quad \hat{P}_{x_2} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2}. \quad (7.8)$$

Para o período $t_0 \leq t < t_1$, a função $\Psi_i(x_1, x_2)$ deve ser a autofunção dos operadores momento $\hat{P}_{x_1}$ e $\hat{P}_{x_2}$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{x_1} \Psi_i &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1} \Psi_i = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1} [Ae^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] \\ &= \frac{\hbar}{i} k_1 [Ae^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] = \hbar k_1 \Psi_i \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{x_2} \Psi_i &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2} \Psi_i = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2} [Ae^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] \\ &= \frac{\hbar}{i} k_2 [Ae^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] = -\hbar k_2 \Psi_i, \end{aligned} \quad (7.10)$$

em que $\hbar k_1$ e $-\hbar k_2$ são, então, autovalores das autofunções dos operadores momento $\hat{P}_{x_1}$ e $\hat{P}_{x_2}$. Assim, a partir deles, os momentos das partículas 1 (p_{x_1}) e 2 (p_{x_2}) são indicados como:

$$p_{x_1} = +\hbar k_1 \quad (7.11)$$

$$p_{x_2} = -\hbar k_2 \quad (7.12)$$

Como a premissa inicial é a de que o módulo do momento das duas partículas é igual, ou seja:

$$|p_{x_1}| = |p_{x_2}| = |\hbar k_1| = |-\hbar k_2|, \quad (7.13)$$

então, o momento total do sistema será nulo porque:

$$P = p_{x_1} + p_{x_2} = \hbar k_1 - \hbar k_2 = 0. \quad (7.14)$$

Nota-se claramente que o momento da partícula 1 é positivo porque a mesma se propaga na direção $+x$ enquanto que o momento da partícula 2 é negativo porque a mesma se propaga na direção x .

O valor do momento é diretamente proporcional ao número de onda k da função de onda.

O detalhe mais interessante é que os momentos das partículas 1 e 2 são os mesmos que antes das partículas se emaranharem via forças locais conhecidas, sendo que cada uma nessa condição seria representada pelas suas próprias funções de onda (já mostradas anteriormente):

$$\Psi_1(x_1) = B e^{ik_1 x_1} \quad (7.15)$$

e

$$\Psi_2(x_2) = C e^{-ik_2 x_2}. \quad (7.16)$$

Os autovalores das autofunções dos operadores momento seriam calculados como:

$$\hat{P}_{x_1} \Psi_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1} (B e^{ik_1 x_1}) = \frac{\hbar}{i} i k_1 (B e^{ik_1 x_1}) = \hbar k_1 \Psi_1 \quad (7.17)$$

$$\hat{P}_{x_2} \Psi_2 = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2} (C e^{-ik_2 x_2}) = -\frac{\hbar}{i} i k_2 (C e^{-ik_2 x_2}) = -\hbar k_2 \Psi_2. \quad (7.18)$$

Fica claro que os momentos p_{x_1} e p_{x_2} das partículas emaranhadas livres são iguais respectivamente aos momentos p'_{x_1} e p'_{x_2} das partículas como se não estivessem emaranhadas:

$$p'_{x_1} = +\hbar k_1 \quad (7.19)$$

$$p'_{x_2} = -\hbar k_2 \quad (7.20)$$

$$(7.21)$$

No período em que a partícula 1 atinge o potencial infinito ($t \geq t_1$), a função de onda total se torna a soma da função de onda incidente $\Psi_i(x_1, x_2)$ com a função de onda refletida $\Psi_r(x_1, x_2)$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_i(x_1, x_2) + \Psi_r(x_1, x_2) = A [e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} + e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] \quad (7.22)$$

Nota-se que a amplitude da onda refletida é a mesma da onda incidente porque a reflexão é total, visto que a barreira de potencial é infinita, conforme indica Eisberg e Resnick [15].

Nessa mesma referência [15], é possível verificar as condições de unicidade e continuidade no ponto onde $x = 0$ (posição da barreira de potencial infinito), que são atendidas pela função $\Psi(x_1, x_2)$, visto que a amplitude dessa função torna-se nula para $x \geq 0$.

A função de onda total $\Psi(x_1, x_2)$ precisa também ser uma solução da equação de Schrödinger e para verificar isto é preciso usar o recurso da combinação de funções exponenciais complexas que resulta numa função trigonométrica cosseno:

$$A \left[e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} + e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} \right] = 2A \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2) \quad (7.23)$$

Para o problema de valor de contorno, a função de onda deve também satisfazer as condições de contorno:

$$\Psi(0, x_2) = \Psi(x_1, 0) = 0, \quad (7.24)$$

ou seja, as funções de onda associadas às partículas 1 e 2 devem obrigatoriamente se anular em $x \geq 0$, devido à presença do potencial infinito.

Assim, devemos ter:

$$\Psi(0, x_2) = 2A \cos(k_1 \cdot 0 - k_2 x_2) = \cos(-k_2 x_2) = 0, \quad (7.25)$$

de modo que, para ser solução do problema físico, a função de onda deve obedecer à relação entre a posição da partícula 2 e seu número de onda, dada por:

$$\Psi(0, x_2) = 2A \cos(k_1 \cdot 0 - k_2 x_2) = \cos(-k_2 x_2) = 0, \quad (7.26)$$

ou seja,

$$k_2 x_2 = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (7.27)$$

em que n é um número inteiro.

Assim, os números de onda válidos devem obedecer à relação:

$$k_2 = \frac{\pi}{x_2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.28)$$

Analogamente, a função de onda deve obedecer à relação entre a posição da partícula 1 e seu número de onda, de modo que os números de onda válidos devem satisfazer:

$$k_1 = \frac{\pi}{x_1} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.29)$$

Em resumo, podemos dizer que as condições de contorno são atendidas somente para determinados números de onda k_1 e k_2 válidos que são indexados pelo número

quântico n . Assim, supondo, esse cálculo sugere a possibilidade de existência de soluções para o problema, desde que também satisfeita a equação de Schrödinger para o período pós-choque com a barreira de potencial infinito.

Substituindo a função de onda cosseno na equação de Schrödinger é possível calcular as duas autofunções do operador energia e seus autovalores:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} [2A \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)] \quad (7.30)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dx_1} [2A \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)] = \frac{\hbar^2}{2m_1} k_1^2 \Psi, \quad (7.31)$$

sendo que o autovalor da energia é $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m_1} k_1^2$ e

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} [2A \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)]$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dx_2} [2A \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)] = \frac{\hbar^2}{2m_2} k_2^2 \Psi, \quad (7.32)$$

sendo que o outro autovalor da energia é $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m_2} k_2^2$.

Usando novamente a soma de funções exponenciais o que resulta na função de onda total é possível verificar se a mesma é também autofunção do operador momento total $\hat{P}_{x_1}$ e $\hat{P}_{x_2}$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{x_1} \Psi &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_1} A [e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} + e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] \\ &\Rightarrow \frac{\hbar}{i} i k_1 \Psi_i - \frac{\hbar}{i} i k_1 \Psi_r = \hbar k_1 \Psi_i - \hbar k_1 \Psi_r = p_1 \Psi_i + p'_1 \Psi_r, \end{aligned} \quad (7.33)$$

onde $p_1 = +\hbar k_1$ e $p'_1 = -\hbar k_1$ são os valores do momento da partícula 1 nas direções $+x$ e $-x$.

$$\begin{aligned} \hat{P}_{x_2} \Psi &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx_2} A [e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} + e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2)}] \\ &\Rightarrow \frac{\hbar}{i} i k_2 \Psi_i - \frac{\hbar}{i} i k_2 \Psi_r = \hbar k_2 \Psi_i - \hbar k_2 \Psi_r = p_2 \Psi_i + p'_2 \Psi_r, \end{aligned} \quad (7.34)$$

onde $p_2 = +\hbar k_2$ e $p'_2 = -\hbar k_2$ são os valores do momento da partícula 2 nas direções $+x$ e $-x$.

Devido à premissa inicial, temos que:

$$|p_1| = |p'_1| = |p_2| = |p'_2| = |\hbar k_1| = |-\hbar k_1| = |\hbar k_2| = |-\hbar k_2|, \quad (7.35)$$

então, o momento total do sistema será:

$$p = p_1 + p'_1 + p_2 + p'_2 = \hbar k_1 - \hbar k_1 + \hbar k_2 - \hbar k_2 = 0. \quad (7.36)$$

O momento total do sistema é nulo, o que indica que o mesmo foi conservado no período de tempo $t \geq t_1$, como deveria ser.

A combinação linear de funções que são autovalores do operador $\hat{P}$, isto é, a soma das funções $\Psi_i(x_1, x_2) + \Psi_r(x_1, x_2)$, as quais são individualmente autofunções de $\hat{P}$ estão de acordo com o caso mais geral de superposição de estados na mecânica quântica:

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots = \sum_n c_n\Psi_n, \quad (7.37)$$

onde c_n são coeficientes numéricos e Ψ_n corresponde aos diferentes estados do momento ou valores que ele pode assumir.

Voltando à análise do momento das partículas 1 e 2 no período de tempo dado por $t \geq t_1$, ou seja, a partir do instante em que a partícula 1 atinge a barreira de potencial infinito, esse estudo sugere que, dadas determinadas condições para os números de onda, ambas as partículas passam a ter componentes de momento na direção $+x$ e $-x$, lembrando que no período de tempo $t_0 \leq t < t_1$ (antes do choque da partícula 1 na barreira de potencial e depois da emissão das duas partículas) a partícula 1 só tinha componente de momento na direção $+x$ e a partícula 2 só na direção $-x$.

Então, esse estudo sugere que a resposta da questão inicial é que a partícula 2 pode sofrer uma mudança imediata no seu momento quando a partícula 1 se choca contra a barreira de potencial infinito no instante $t = t_1$ independente da distância de afastamento entre ambas e do fato de não haver mais interação mútua por forças locais conhecidas, dadas determinadas condições para os números de onda.

Com este resultado, sugere-se que é possível verificar que a evolução temporal das partículas pode realmente sofrer a influência de efeitos não-locais representados pelos emaranhamentos quânticos, mesmo em longas distâncias. Vale ressaltar que esse cálculo sugere o fenômeno, mas para demonstrar esse efeito com rigor, é necessário resolver o problema via equação de Schrödinger dependente do tempo e não apenas utilizando o modelo simples de se supor válido resolver o problema intervalo por intervalo.

Capítulo 8

Considerações Finais e Conclusões

Neste trabalho, fizemos um estudo amplo do fenômeno de emaranhamento quântico de duas partículas, abrangendo desde o seu surgimento por meio do artigo que originou o paradoxo EPR e as constatações experimentais que foram obtidas nas décadas seguintes, até as aplicações deste tipo de estado físico, em especial no caso do teletransporte quântico.

Foi também estudado no sistema formado por um par de partículas emaranhadas, por meio do formalismo da mecânica quântica, a possibilidade de mudança do momento de uma partícula livre, que ocorre imediatamente quando sua partícula parceira, já muito afastada, se choca contra uma barreira de potencial infinito, mesmo não havendo mais interação entre ambas.

O estudo sugere que para determinadas condições existe a possibilidade de afetar o momento de uma partícula quando o momento da outra é alterado por um potencial. Este resultado estimula que se faça um estudo mais aprofundado para demonstrar o fenômeno de que partículas que aparentemente não estão sujeitas a potenciais, mas estão emaranhadas a outras, podem de fato se comportar como se sentissem o efeito de um potencial sobre elas devido ao comportamento das parceiras emaranhadas, estas sim sujeitas aos mesmos. Tal resultado também sugere o estudo de novas configurações em sistemas de duas partículas, como, por exemplo, o uso de degraus de potenciais, poços de potenciais ou potenciais coulombianos.

Avançando mais o estudo, é possível tratar também de sistemas emaranhados generalizados, ou seja, sistemas compostos de mais de duas partículas.

O autor da dissertação pretende usar a base inicial desenvolvida neste trabalho para explicar a causa da existência da gravidade e da inércia como sendo o resultado de interações não-locais, ou seja, o resultado da existência de emaranhamentos quânticos generalizados entre todas as partículas.

REFERÊNCIAS

ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. **Phys. Rev. Letters**, v. 42, p. 2, 1982.

BASSALO, J. M. F. **Curiosidades da física I e II**. Belém, Pará: Fundação Minerva UFPA, 2008.

BELL, J. S. **Speakable and unspeakable in quantum mechanics**. Cambridge: University Press, 1987.

BENNET, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. **Phys. Rev. Letters**, v. 70, p. 1895-1899, 1993.

BOHM, D.; AHARONOV, Y. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. **Phys. Rev.**, v. 108, p. 1070-1076, 1935.

BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev.**, v. 48, p. 696-702, 1935.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev.**, v. 47, p. 777, 1935.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física quântica**. 9. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1994.

MUNDIM, K. **Teoria dos operadores**. Universidade de Brasília, aula 11, química e física. Disponível em: <<http://vsites.unb.br/iq/kleber/CursosVirtuais/QQaula-11/aula-11.htm>>. Acesso em: jan. 2010.

PESSOA JR, O. P. **Conceitos de física quântica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

_____. **Conceitos e interpretações da mecânica quântica: o teorema de Bell**. São Paulo: Universidade de São Paulo, Mini-curso, WECIQ, 2006.

PISA, A. F. R. T. Schrödinger, emaranhamento e decoerência no livro 100 anos de física quântica. **Ed. Livraria da física**, Instituto de Física (USP), São Paulo, 2001.

SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. New York: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994.

SAUER, T. An Einstein manuscript on the EPR paradox spin observables studies.
History and Philosophy of Modern Physics, v. 38, p. 879-887, 2007.

SCHRÖEDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems,
proc. **Cambridge Phil. Society**, v. 31, p. 555-563, 1935.